

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
KÖNIGSBERG

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

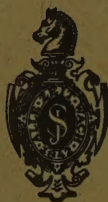
VON

L. LICHTENSTEIN
BERLIN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT.

BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

7. BAND



BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1920

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
KÖNIGSBERG

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
BERLIN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT.

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

7. BAND



BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1920

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Courant, R., Über die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematischen Physik	1
Hamburger, H., Bemerkungen zu einer Fragestellung des Herrn Pólya . . .	302
Koebe, P., Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung. (VI. Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Kreisbereiche. Uniformisierung hyperelliptischer Kurven)	235
Lichtenstein, L., Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen. Zweite Abhandlung. Stabilitätsbetrachtungen	126
Loewy, A., Begleitmatrizen und lineare homogene Differentialausdrücke . . .	58
v. Mises, R., Berichtigung zu meiner Arbeit „Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung“	323
Schur, I., Über einen von Herrn L. Lichtenstein benutzten Integralsatz . . .	232

Über die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematischen Physik.

Von

R. Courant in Göttingen.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

- § 1. Die klassischen Minimaleigenschaften der Eigenwerte und Eigenfunktionen.
- § 2. Ein Hilfssatz. Ein allgemeiner Satz über den wesentlich positiven Charakter der Eigenwerte.
- § 3. Die Maximum-Minimum-Eigenschaft der Eigenwerte und Eigenfunktionen.
- § 4. Folgerungen. Allgemeine Sätze über die Verteilung der Eigenwerte. Anwendungen auf Schwingungsvorgänge.
- § 5. Weitere Folgerungen. Stetigkeitseigenschaften.
- § 6. Die asymptotische Eigenwertverteilung für die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ bei Gebieten, welche aus endlich vielen Quadraten oder Würfeln bestehen.
- § 7. Ausdehnung des Resultates auf die allgemeine sich selbst adjungierte elliptische Differentialgleichung.
- § 8. Die Gesetze der asymptotischen Eigenwertverteilung für einen beliebigen Bereich.
- § 9. Die Gesetze der asymptotischen Eigenwertverteilung in verschärfter Form.
- § 10. Vektorielle Eigenwertprobleme. Das Gesetz der asymptotischen Eigenwertverteilung für die elektrischen Eigenschwingungen eines Hohlraumes.

Anhang. Über einige Approximationssätze.

Einleitung.

Die wichtigsten Randwertaufgaben der mathematischen Physik führen, wie bekannt, auf das Problem der Eigenwerte, welches sich in dem typischen Falle der gewöhnlichen Schwingungsgleichung folgendermaßen formulieren läßt: Es sei im zwei- bzw. im dreidimensionalen Raume mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y bzw. x, y, z ein Gebiet G mit stetig gekrümmter Begrenzung gegeben; gesucht sind diejenigen Konstanten λ , für welche die Differentialgleichung

$$(1) \quad \Delta u + \lambda u = 0$$

eine nicht identisch verschwindende, im Inneren und auf dem Rande von G stetige Lösung u besitzt, die am Rande des Gebietes einer homogenen Randbedingung, etwa

$$(2) \quad u = 0$$

oder

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$$

oder allgemeiner

$$(4) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$$

oder schließlich auf einem Teil R' des Randes der Bedingung (3) oder (4), auf dem übrigen Teil R'' des Randes der Bedingung (2) genügt. Hierbei bedeutet Δu den Differentialausdruck

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \text{bzw.} \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

ν die nach innen gerichtete Normale, σ eine stetige oder stückweise stetige Funktion auf dem Rande. Die Konstanten λ sind die „Eigenwerte“ des Problems, die zugehörigen Lösungen u die „Eigenfunktionen“. Jeder Eigenwert ist so oft zu rechnen, als es zu ihm gehörige linear unabhängige Eigenfunktionen gibt. Physikalisch sind die Eigenwerte bei den Schwingungsproblemen im wesentlichen die *Quadrate der Eigenschwingungszahlen* und daher positiv. Wir werden im folgenden jedoch solche Fälle nicht ausschließen, wo auch negative Eigenwerte auftreten können.

An Stelle der Differentialgleichung (1) kann man eine allgemeinere Differentialgleichung

$$(5) \quad L(u) + \lambda k u = 0$$

in Betracht ziehen, wobei $L(u)$ ein sich selbst adjungierter elliptischer Differentialausdruck der Form

$$L(u) = p \Delta u + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + q u$$

ist. Hierin sind $p, \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, q, k$ in G mit stetigen Ableitungen versehene Funktionen, die obendrein noch den Bedingungen

$$(6) \quad p > 0, \quad k > 0$$

genügen sollen.

Man kann ferner analoge Eigenwertprobleme untersuchen, bei denen an Stelle der gesuchten Funktion u ein Vektor u steht, welcher ebenfalls am Rande gewissen homogenen Randbedingungen unterworfen ist.

Durch die klassischen Untersuchungen von H. A. Schwarz, H. Poincaré und ihren Nachfolgern, vor allem aber durch die Theorie der Integralgleichungen sind die genannten Eigenwertprobleme in dem Sinne vollständig gelöst, daß die Existenz einer abzählbar unendlichen, sich im Endlichen nirgends häufenden Menge von Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$, des „Spektrums“, und eines zugehörigen vollständigen Systems von Eigenfunktionen $u_1, u_2, u_3, \dots$ erwiesen ist, welche die Gesamtheit aller linear voneinander unabhängigen Lösungen des Problems darstellen. Die „normierten“ Eigenfunktionen erfüllen die Orthogonalitätsbedingungen

$$(7) \quad \iint_G k u_i u_l dx dy = 0 \quad (i \neq l)$$

$$(8) \quad \iint_G k u_i^2 dx dy = 1,$$

und jede den betreffenden Randbedingungen genügende mit ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung einschließlich im Innern und auf dem Rande von G stetige Funktion f läßt sich in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe nach den Eigenfunktionen entwickeln:

$$f = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + \dots,$$

wobei die Entwicklungskoeffizienten nach Fourierscher Art durch die Gleichung

$$(9) \quad c_i = \iint_G k u_i f dx dy$$

gegeben sind.

Allgemein kann man für irgend zwei in G definierte Funktionen f, φ , deren Quadrate über G integrabel sind, die Fourierschen Koeffizienten c_i, γ_i gemäß der Definition (9) bilden. Es gilt dann stets die sogenannte Vollständigkeitsrelation

$$(10) \quad \iint_G k f \varphi dx dy = c_1 \gamma_1 + c_2 \gamma_2 + c_3 \gamma_3 + \dots$$

Nachdem diese Resultate gesichert sind, erscheint als die nächste Aufgabe die Untersuchung der *Abhängigkeit der Eigenwerte von den Bedingungen des Problems*, d. h. von dem zugrunde gelegten Gebiet G , von den Randbedingungen sowie von den in der Differentialgleichung auftretenden

den Ortsfunktionen. Auch vom Standpunkt des Physikers aus bieten diese Fragen hohes Interesse. Für fundamentale Theorien der modernen theoretischen Physik, wie die Theorie der *Hohlraumstrahlung* und der *spezifischen Wärmen* ist insbesondere die *asymptotische Verteilung der Eigenwerte*, d. h. das Verhalten des n -ten Eigenwertes bei wachsendem n , von entscheidender Bedeutung; die hier positiv angenommenen Eigenwerte sind dabei in eine aufsteigende Reihe geordnet zu denken. A. Sommerfeld und H. A. Lorentz¹⁾ haben auf Grund physikalischer Erwägungen das *Postulat* aufgestellt, daß die *Eigenwerte der klassischen mit der Gleichung (1) verknüpften Schwingungsprobleme asymptotisch, d. h. bis auf einen mit wachsendem n gegen 1 konvergierenden Faktor, von der Gestalt des Gebietes unabhängig sind und sich lediglich durch dessen Flächeninhalt bzw. Volumen bestimmen.*

Bezeichnet man z. B. für ein räumliches Gebiet mit dem Volumen V mit $A(\lambda)$ die Anzahl der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte der Differentialgleichung (1), so drückt sich das asymptotische Eigenwertgesetz durch die Formel

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{A(\lambda)}{\lambda^{\frac{3}{2}}} = \frac{V}{6\pi^2}$$

aus.

Die zuletzt genannte Frage nach der asymptotischen Eigenwertverteilung wurde von H. Weyl²⁾ in einer Folge scharfsinniger Arbeiten aufgenommen und in weitgehendem Umfange gelöst, so daß das Postulat von Sommerfeld und Lorentz für eine Reihe der wichtigsten Schwingungsprobleme mathematisch bewiesen ist.

Die Untersuchungen von Weyl beruhen auf der Äquivalenz des Eigenwertproblems für die Differentialgleichung mit einem solchen für eine Integralgleichung und auf der Anwendung von allgemeinen Sätzen der Integralgleichungstheorie. Wirft man jedoch die Frage nach der Abhängigkeit der Eigenwerte von den Daten des Problems in ihrer vollen Allgemeinheit auf, so findet man, daß die Benutzung der Integralgleichungen einen Umweg bedeutet, der keinen vollen Einblick in die vorliegenden Zusammenhänge gewährt und nicht gleichmäßig zum Ziele führt.

Ich möchte nun in der vorliegenden Abhandlung zeigen, daß man von einem andern Gesichtspunkte aus einen direkten Zugang zu dem

¹⁾ A. Sommerfeld, Phys. Zeitschrift **11**, 1910, S. 1061; H. A. Lorentz Vortrag auf dem internationalen Mathematikerkongreß in Rom 1908; Phys. Zeitschr. **11** (1910), S. 1248. — Zur Frage der spezifischen Wärmen siehe P. Debye, Ann. d. Physik. **39** (1912), S. 789 ff.

²⁾ H. Weyl, Math. Annalen, **71**, S. 441–479, zitiert mit A., Creilles Journal, **141**, S. 1–11, zitiert mit C. 1, daselbst S. 163–181, zitiert mit C. 2; dasselbe Journal, **143**, S. 177–202, zitiert mit C. 3.

ganzen Komplex der gestellten Fragen erhält und in überraschend einfacher und einheitlicher Weise zu einer *vollständigen Beherrschung der Eigenwerte in ihrer Abhängigkeit von den Koeffizienten der Differentialgleichung, den Randbedingungen und dem Gebiete* gelangt. Die Sätze über asymptotische Eigenwertverteilung ergeben sich dabei aus den allgemeinen Resultaten und Überlegungen ganz von selbst und zwar für sämtliche betrachteten Randbedingungen und eine beliebige Anzahl von unabhängigen Variablen; gleichzeitig erhält man für den bei Ersetzung des n -ten Eigenwertes durch seinen asymptotischen Wert gemachten Fehler eine Abschätzung, welche die Weylsche an Genauigkeit wesentlich übertrifft und theoretisch befriedigend erscheint.

Der leitende Gedanke bei unserer Methode wird sein, die Eigenwerte und Eigenfunktionen durch *Extremaleigenschaften* zu charakterisieren, wie dies auch dem Wesen der Schwingungsgleichungen entspricht, welche ja aus Variationsproblemen entspringen.

Die seit langem bekannten *Minimaleigenschaften der Eigenfunktionen und Eigenwerte* sind jedoch in ihrer klassischen Form³⁾ ungeeignet, als Grundlage der beabsichtigten Untersuchung zu dienen, da sie eine *rekurrente Definition der Eigenwerte* liefern, bei der man zur Charakterisierung des n -ten Eigenwertes die Kenntnis der zu den vorangehenden Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen voraussetzt. Von diesem Übelstande kann man sich nun durch eine einfache Bemerkung befreien, welche dazu führt, den n -ten Eigenwert für sich nicht durch ein gewöhnliches isoperimetrisches Minimum-Problem zu charakterisieren, wie dies bisher üblich war, sondern durch ein *neuartiges Maximum-Minimum-Problem*. Diese an sich schon fruchtbare Bemerkung werden wir mit folgendem *allgemeinen Prinzip der Variationsrechnung* in Verbindung bringen: *Wenn in einem Minimum-Problem der Bereich der zur Konkurrenz zugelassenen Vergleichsfunktionen durch Verschärfung der Bedingungen verengert wird, so nimmt der Wert des Minimums nicht ab; wenn umgekehrt der Bereich der zur Konkurrenz zugelassenen Funktionen durch Milderung der Bedingungen erweitert wird, so nimmt das Minimum nicht zu.* Durch sinngemäße Anwendung dieses Gedankens werden wir fast ohne jede Rechnung zu allen Resultaten dieser Abhandlung gelangen.

Die independente Definition des n -ten Eigenwertes durch ein Maximum-Minimum-Problem bietet überdies, wie in § 3 gezeigt werden soll, die methodisch bedeutsame Möglichkeit, die Theorie der Eigenwerte von der Theorie der Eigenfunktionen vollständig loszulösen, so daß die Resultate

³⁾ Vgl. H. Weber, Math. Annalen 1, S. 1 ff.

dieser Arbeit begründet bleiben, auch wenn man von der Existenz der Eigenfunktionen keinen Gebrauch macht⁴⁾.

In § 1 werde ich die Formulierung und Begründung der klassischen Minimaleigenschaften geben. Diese Auseinandersetzung ist wünschenswert, weil sich in der Literatur die betreffenden Tatsachen nirgends zusammenhängend in der nötigen Allgemeinheit dargestellt finden.

Der § 2 enthält einen Hilfssatz und einen sich daraus ergebenden allgemeinen Satz über den wesentlich positiven Charakter der Eigenwerte elliptischer Differentialgleichungen. In § 3 wird die Maximum-Minimum-Eigenschaft der Eigenwerte und Eigenfunktionen bewiesen. In § 4 werden eine Reihe grundlegender Sätze über die Verteilung der Eigenwerte gefolgert; dabei ergeben sich durch *physikalische Deutung der gewonnenen Resultate allgemeine Sätze über die Schwingungszahlen schwingender Systeme*, die sich als Erweiterungen bzw. Ergänzungen berühmter Untersuchungen erweisen, wie sie Lord Rayleigh in seiner *theorie of sound* über schwingende Systeme von endlich vielen Freiheitsgeraden angestellt hat. In § 5 werden als weitere Folgerungen der allgemeinen Grundgedanken vor allem die Stetigkeitseigenschaften der Eigenwerte in ihrer Abhängigkeit von den Daten des Problems erörtert. Die §§ 6, 7, 8, 9 enthalten Untersuchungen über die asymptotischen Eigenwertgesetze für die sämtlichen oben angeführten Eigenwertprobleme, und darüber hinausgehend eine möglichst scharfe Abschätzung der durch die asymptotische Formel gelieferten Genauigkeit. In § 10 endlich werden die Grundgedanken dieser Arbeit auf ein vektoriellcs Eigenwertproblem, nämlich das *Problem der Hohlraumstrahlung* angewandt. Hier ergibt sich das Spektralgesetz der Hohlraumstrahlung mit befriedigender Schärfe fast mühelos ohne jede Rechnung oder Abschätzung aus unseren allgemeinen Resultaten.

Die Methoden dieser Abhandlung sind in völlig unveränderter Form für eine *beliebige Anzahl von unabhängigen Variablen* anwendbar. Es wird daher genügen, der Betrachtung im allgemeinen zwei unabhängige Variable zugrunde zu legen. Wo Modifikationen in den Beweisen oder den Resultaten bei Übergang zu mehr unabhängigen Veränderlichen auftreten, wird dies ausdrücklich bemerkt und ausgeführt werden.

Im übrigen sind die allgemeinen Überlegungen dieser Arbeit auch von der Ordnung der Differentialgleichung unabhängig, so daß Resultate wie z. B. die in § 4 entsprechend auch für solche Schwingungsvorgänge gelten, welche von einer Differentialgleichung vierter Ordnung beherrscht werden, etwa für die *Schwingungen von Platten*, die ja durch die Differentialgleichung $\Delta \Delta u + \lambda u = 0$ gekennzeichnet sind.

⁴⁾ Auf diesen Gedanken werde ich in einer folgenden Arbeit näher eingehen.

Vom prinzipiellen Standpunkt aus scheint mir die hier entwickelte Methode insofern Interesse zu verdienen, als sie einen Beitrag zur Lösung der seit Riemann und Dirichlet immer deutlicher hervortretenden Aufgabe darstellt, die Tatsachen der Analysis unter dem Gesichtspunkte der Variationsrechnung zu ordnen und zu verstehen^{4a)}.

§ 1.

Die klassischen Minimaleigenschaften der Eigenwerte und Eigenfunktionen.

Um die Minimaleigenschaften der Eigenwerte und Eigenfunktionen der allgemeinen sich selbst adjungierten Differentialgleichung (5) zu entwickeln, benutzen wir folgende abkürzende Bezeichnungen:

$$D[\varphi] = \iint_G \left\{ p \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] + q \varphi^2 \right\} dx dy,$$

$$D[\varphi, \psi] = \iint_G \left\{ p \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] + q \varphi \psi \right\} dx dy.$$

Hierbei sind φ, ψ Funktionen in G , für welche die betreffenden Integrale einen Sinn haben; $D[\varphi]$ soll das *Dirichletsche Integral* der Funktion φ heißen.

Ferner werden wir uns der *Greenschen Formel*

$$(11) \quad D[\varphi, f] = - \iint_G f L(\varphi) dx dy - \int_R p f \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} ds$$

bedienen. In dieser bedeuten φ, f zwei in G ⁵⁾ stetige Funktionen, von denen die erste in G stetige Ableitungen erster und im Innern stückweise stetige⁶⁾ Ableitungen zweiter Ordnung besitzt, während für die Funktion f nur stückweise Stetigkeit der ersten Ableitungen in G vorausgesetzt zu werden

^{4a)} Den Grundgedanken der hier entwickelten Methode habe ich an dem Beispiel der Differentialgleichung (1) und der Randbedingung (2) in einer Note in den Göttinger Nachrichten, 1919, S. 255 ff. dargelegt.

⁵⁾ Mit der Bezeichnung „stetig in G “ soll hier, wie im folgenden stets Stetigkeit mit Einschluß des Randes gemeint sein.

⁶⁾ Stückweise stetig soll eine Funktion in G heißen, wenn sie bis auf endliche Sprünge an endlich vielen analytischen (oder allgemeiner stetig gekrümmten) Kurvenstücken und bis auf endlich viele isolierte Punkte in G stetig ist. Gelegentlich werden wir auch die abgekürzte Bezeichnung „stetig differenzierbar“, „stückweise stetig differenzierbar“ usw. gebrauchen, wenn wir Funktionen meinen, welche selbst stetig sind und stetige bzw. stückweise stetige Ableitungen besitzen. — Wir bemerken, daß bei einer stetigen Funktion mit stückweise stetigen Ableitungen diese letzteren tangentia zu jeder der betrachteten analytischen Linien stetig sein müssen.

braucht. Mit ds ist das Linienelement des Randes R von G bezeichnet; $\frac{\partial}{\partial \nu}$ bedeutet die Ableitung nach der ins Innere von G gerichteten Normale.

Das Gebiet G sei zunächst als von endlich vielen geschlossenen stetig gekrümmten Kurven begrenzt vorausgesetzt.

Wenn auch die Funktion f die für φ gemachten Voraussetzungen erfüllt, so folgt unmittelbar die *zweite Greensche Formel*

$$(11a) \quad \iint_G [f L(\varphi) - \varphi L(f)] dx dy = - \int_R p \left(f \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \varphi \frac{\partial f}{\partial \nu} \right) ds.$$

Wir wollen die Randbedingungen (2) oder (3) oder (4) betrachten, wobei jedoch zunächst für die in der Bedingung (4) auftretende Funktion σ vorausgesetzt sei, daß

$$(12) \quad \sigma \geq 0$$

gelte, wie dies übrigens bei den meisten Problemen der mathematischen Physik der Fall ist (z. B. bei Problemen der Wärmeleitung). Dann ergibt sich aus der Formel (11) sofort, daß *alle Eigenwerte oberhalb einer endlichen Schranke liegen*. Denn es folgt, wenn wir $f = \varphi = u$ setzen, wobei u eine zum Eigenwert λ gehörige Eigenfunktion des Eigenwertproblems ist, mit Rücksicht auf (8)

$$D[u] = \iint_G u \lambda k u dx dy - \int_R p u \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = \lambda - \int_R p u \frac{\partial u}{\partial \nu} ds.$$

Da aber wegen der für die Eigenfunktion geltenden Relation (8) und der Beschränktheit der Funktion q in G das Integral $\iint_G q u^2 dx dy$ oberhalb einer nur von q und k abhängigen Schranke liegt⁷⁾, so liegt auch $D[u]$ oberhalb dieser Schranke, und da ferner wegen der Vorzeichenbedingungen $p > 0$, $\sigma \geq 0$ das Randintegral jedenfalls nicht negativ ist, so folgt die behauptete Eigenschaft der Eigenwerte unmittelbar. *Wir dürfen uns die Eigenwerte also in eine ansteigende Reihe geordnet denken:*

$$(13) \quad \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots,$$

wobei jeder Eigenwert so oft zu schreiben ist, wie seine Vielfachheit angibt. In entsprechender Weise werden die Eigenfunktionen durch $u_1, u_2, \dots$ bezeichnet.

⁷⁾ Es ist nämlich $\left| \iint_G q u^2 dx dy \right| \leq \frac{|q|_{\text{Max}}}{k_{\text{Min}}} \iint_G u^2 dx dy$, wobei $|q|_{\text{Max}}$ und k_{Min} die Extremwerte der betreffenden Funktionen in G bedeuten. (Vgl. auch S. 36.)

Nunmehr lassen sich die klassischen Minimaleigenschaften der Eigenfunktionen und Eigenwerte für die Randbedingungen $u = 0$ folgendermaßen aussprechen:

Satz 1. Der n -te Eigenwert λ_n der Differentialgleichung $L(u) + \lambda ku = 0$ für das Gebiet G bei der Randbedingung $u = 0$ ist der kleinste Wert, welchen das Integral $D[\varphi]$ annehmen kann, wenn zum Vergleich alle in G stetigen und mit stückweise stetigen ersten Ableitungen versehenen, der Randbedingung $\varphi = 0$ genügenden Funktionen φ zugelassen werden, welche die weiteren Bedingungen

$$(14) \quad \iint_G k \varphi u_i dx dy = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$(15) \quad \iint_G k \varphi^2 dx dy = 1$$

befriedigen. Das Minimum wird angenommen für die n -te Eigenfunktion $\varphi = u_n$.

Zum Beweise nehmen wir zunächst an, φ besitze in G stetige erste und im Innern stückweise stetige zweite Ableitungen, derart, daß das Integral von $L(\varphi)^2$ über G existiert. Dann folgt aus der Greenschen Formel (11) wegen der Randbedingung $\varphi = 0$ für $f = \varphi$

$$D[\varphi] = - \iint_G \varphi L(\varphi) dx dy.$$

Wenden wir hierauf die Vollständigkeitsrelation (10) an, indem wir an Stelle der dort stehenden Funktion f den Ausdruck $\frac{L(\varphi)}{k}$ setzen, so ergibt sich

$$D[\varphi] = - \sum_{i=1}^{i=\infty} \gamma_i \iint_G u_i L(\varphi) dx dy, \quad \text{wo} \quad \gamma_i = \iint_G k \varphi u_i dx dy,$$

und hieraus durch Anwendung der Formel (11a) auf jedes Glied der Summe und Berücksichtigung von $L(u_i) = -\lambda_i k u_i$:

$$D[\varphi] = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \gamma_i^2.$$

Da nun aus (14) und (15) ebenfalls vermöge der Vollständigkeitsrelation die Gleichungen

$$\gamma_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i^2 = 1$$

folgen, so ergibt sich unmittelbar wegen (13)

$$D[\varphi] \geq \lambda_n$$

wie behauptet wurde.

Um die zunächst über die Ableitungen von φ gemachten Voraussetzungen abzustreifen, brauchen wir einige im *wesentlichen bekannte Approximationssätze*, deren Beweis im Anhang dieser Abhandlung angefügt ist, um den Gedankengang hier nicht zu unterbrechen. Man kann nämlich, wie im Anhang ausgeführt werden soll, jede den Bedingungen von Satz 1 genügende Funktion φ durch eine ebensolche Funktion φ' beliebig genau approximieren, welche überdies in G durchweg stetige erste und im Inneren stückweise stetige zweite Ableitungen besitzt, für welche $L(\varphi')$ über G integrabel ist, und deren Dirichletsches Integral sich von demjenigen der Funktion φ um beliebig wenig unterscheidet. Aus dieser Bemerkung folgt unmittelbar, daß die in Satz 1 ausgesprochene Minimaleigenschaft von u_n auch gilt, wenn für φ außer der Stetigkeit nur stückweise Stetigkeit der ersten Ableitungen vorausgesetzt wird.

Ganz ebenso wie Satz 1 ergibt sich die entsprechende Minimaleigenschaft für die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$.

Satz 2. Der n -te Eigenwert λ_n der Differentialgleichung $L(u) + \lambda ku = 0$ für das Gebiet G bei der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ ist der kleinste Wert, den das Integral $D[\varphi]$ annehmen kann, wenn zum Vergleich alle in G stetigen, mit stückweise stetigen ersten Ableitungen versehenen, der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ genügenden Funktionen φ zugelassen werden, welche die weiteren Bedingungen

$$(14) \quad \iint_G k \varphi u_i dx dy = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$(15) \quad \iint_G k \varphi^2 dx dy = 1$$

befriedigen. Das Minimum wird angenommen für die n -te Eigenfunktion $\varphi = u_n$ ⁸⁾.

Die Aussagen dieses Satzes lassen sich noch erweitern durch folgenden Zusatz:

Wenn in dem Variationsproblem des Satzes 2 der Funktion φ auf dem Rande R keinerlei Bedingung auferlegt wird, so bleibt die Aussage von Satz 2 bestehen. D. h. die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ stellt sich bei dem Minimum-Problem von selbst ein, wenn die zur Konkurrenz zugelassenen Funktionen φ am Rande überhaupt keiner Bedingung unterworfen werden.

Diese Tatsache folgt unmittelbar aus der Bemerkung, daß man jede den Bedingungen des Zusatzes genügende Funktion nebst ihrem Dirichlet-

⁸⁾ Hierbei ist natürlich $\lambda_1 = 0$, $u_1 = \text{const.}$ als erster Eigenwert, bzw. erste Eigenfunktion zu rechnen.

chen Integral durch eine den Bedingungen des Satzes 2 genügende Funktion nebst deren Dirichletschem Integral beliebig genau approximieren kann. Die nähere Begründung dieser Bemerkung wird ebenfalls in den Anhang verwiesen.

Für die allgemeinere Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$, wobei σ eine stetige Funktion auf dem Rande sei, erhält das charakteristische Variationsproblem eine etwas andere Gestalt dadurch, daß zu dem Integral über das Gebiet G noch ein Integral über den Rand R hinzutritt. Es gilt nämlich

Satz 3. Der n -te Eigenwert λ_n der Differentialgleichung $L(u) + \lambda ku = 0$ bei der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$ ist der kleinste Wert, welchen der Ausdruck

$$\mathfrak{D}[\varphi] = D[\varphi] + \int_R p \sigma \varphi^2 ds$$

annehmen kann, wenn zum Vergleich alle in G stetigen mit stückweise stetigen ersten Ableitungen versehenen Funktionen φ zugelassen werden, welche der Randbedingung $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \sigma \varphi$ genügen und außerdem die Bedingungen

$$\iint_G k \varphi u_i dx dy = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$\iint_G k \varphi^2 dx dy = 1$$

erfüllen. Das Minimum wird angenommen für die n -te Eigenfunktion $\varphi = u_n$.

Auch hier gilt entsprechend wie bei Satz 2 folgender

Zusatz: Die Aussage von Satz 3 bleibt bestehen, wenn der Funktion φ keine Randbedingung auferlegt wird.

Der Beweis verläuft ganz ebenso wie bei den entsprechenden Tatsachen für die anderen Randbedingungen. Besitzt zunächst wieder φ in G stetige zweite Ableitungen und existiert das Integral von $L(\varphi)^2$ über G , so folgt aus der Greenschen Formel (11) wenn man $f = \varphi$ setzt,

$$\mathfrak{D}[\varphi] = - \iint_G \varphi L(\varphi) dx dy.$$

Auf die rechte Seite wenden wir die Vollständigkeitsrelation an und schließen sodann wörtlich wie oben, indem wir berücksichtigen, daß wegen der Randbedingungen am Rande

$$p \left(u_i \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \varphi \frac{\partial u_i}{\partial \nu} \right) = 0$$

gilt.

Der Zusatz folgt aus der Bemerkung, daß wir jede den Bedingungen des Zusatzes genügende Funktion durch eine den Bedingungen des Satzes 3

genügende Funktion derart approximieren können, daß dabei auch der Wert von $D[\varphi]$ und $\mathfrak{D}[\varphi]$ beliebig genau approximiert wird. Auch dieser Approximationssatz wird im Anhang bewiesen werden.

Die oben ausgesprochenen Sätze lassen sich in zwei Richtungen erweitern. Erstens kann man, anstatt auf dem Rande R durchweg die Bedingung $u = 0$ oder $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$ zu betrachten, die letztere Bedingung auf einem aus endlich vielen Stücken bestehenden Teile R' des Randes, die erste — übrigens aus der zweiten als Grenzfall für $\sigma = \infty$ sich ergebende — Bedingung auf dem übrigen Teil R'' des Randes stellen, und obendrein der Funktion σ noch eine endliche Anzahl von Sprüngen gestatten. Zweitens kann man die Voraussetzung, daß der Rand durchweg stetig gekrümmt ist, aufgeben, und statt dessen zulassen, daß der Rand aus endlich vielen durchweg stetig gekrümmten — oder, was keine wesentliche Einschränkung für uns ist⁹⁾, aus endlich vielen analytischen — Teilen besteht, die miteinander Ecken, oder im Raume Kanten bilden dürfen, ohne sich zu berühren. Die in den Sätzen 1—3 gekennzeichneten Minimaleigenschaften der Eigenwerte und die Begründungen dieser Sätze bleiben dann bestehen. Dabei sind in den Eckpunkten des Randes, bzw. an den Punkten, wo die Randbedingung unstetig wird, die Stetigkeitsvoraussetzungen über die ersten Ableitungen durch die erweiterte Voraussetzung zu ersetzen, daß diese Randpunkte kein Hindernis für die Anwendung der Greenschen Formel auf das ganze Gebiet G bilden, daß also etwa das Integral $\int \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right| ds$ gegen Null erstrebt, wenn es über den in G liegenden Teil eines um den betreffenden Punkt geschlagenen Kreises vom Radius ε erstreckt wird, und wenn ε gegen Null rückt. In der Tat genügen die Eigenfunktionen u des Problems dieser Voraussetzung¹⁰⁾.

⁹⁾ Wie aus den später in § 5 bewiesenen Stetigkeitseigenschaften der Eigenwerte folgt, ergeben sich alle Resultate der vorliegenden Arbeit unmittelbar für stetig gekrümmte, sogar noch allgemeinere Randstücke, wenn sie für analytische Randstücke gelten.

¹⁰⁾ Das Eigenwertproblem der Differentialgleichung (1) bzw. (5) für Gebiete mit Ecken usw. ist in einer Reihe neuerer Arbeiten behandelt: S. Zaremba, *Journal d. Math.* 10 (1904), S. 395—444; L. Lichtenstein, *Journal für Mathematik* 140 (1910) S. 100—119; *Acta math.* 36 (1913), S. 345—386; T. Carleman, Über das Neumann-Poincarésche Problem für ein Gebiet mit Ecken, Dissertation Upsala 1916; Bär, Über Greensche Randwertaufgaben bei der Schwingungsgleichung, Dissertation Würzburg 1915. Man vergleiche auch den soeben erschienenen Enzyklopädieartikel von L. Lichtenstein. II C 3. „Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung.“ Die genannten Untersuchungen sind nicht ohne Weitläufigkeiten, sie beziehen sich ferner explizite nur auf das Problem in der Ebene (vgl. indessen Carleman, S. 31—38). Ich werde daher im folgenden, wenn es sich um Gebiete mit Ecken bzw. Kanten oder um Randbedingungen mit Unstetigkeiten handelt, zeigen.

Der Satz 3 und sein Zusatz sind zunächst nur unter der Voraussetzung $\sigma \geq 0$ bewiesen. Wenn auch diese Voraussetzung bei zahlreichen Problemen der mathematischen Physik erfüllt ist, so gibt es doch Fälle, für welche dies nicht zutrifft, so z. B. die Randwertaufgabe der Strahlungstheorie für einen Hohlraum, der nicht von einer einzigen konvexen Fläche begrenzt ist (siehe § 10). Um die Voraussetzung $\sigma \geq 0$ beseitigen zu können, beweisen wir einen Hilfssatz, welcher zudem noch ein selbständiges Interesse besitzt.

§ 2.

Ein Hilfssatz. Ein allgemeiner Satz über den wesentlich positiven Charakter der Eigenwerte.

Der hier zu beweisende Hilfssatz, welcher später lediglich verwandt werden wird, wenn es sich um die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$ mit nicht durchweg positiven oder verschwindendem σ handelt, lehrt, daß gegenüber dem Dirichletschen Integral $D[\varphi]$ das Randintegral $\int_R p \sigma \varphi^2 ds$ relativ beliebig klein wird, wenn der Wert des Dirichletschen Integrales hinreichend groß ist und die Bedingung (15) gilt.

Hilfssatz. Ist φ eine in G stetige, stückweise stetig differenzierbare Funktion mit beliebig großem Dirichletschen Integral, welche der Bedingung

$$(15) \quad \iint_G k \varphi^2 dx dy = 1$$

genügt, sind ferner σ und p beschränkte, stückweise stetige Funktionen der Bogenlänge s auf dem Rande R von G , dann ist das Randintegral

$$\int_R p \sigma \varphi^2 ds$$

höchstens von der Größenordnung

$$\sqrt{D[\varphi]},$$

d. h. es gilt stets eine Beziehung der Form

$$\left| \int_R p \sigma \varphi^2 ds \right| < C \sqrt{D[\varphi]} + C',$$

wobei C, C' zwei von φ unabhängige Konstanten sind.

Wie man direkt und unabhängig von der genannten Literatur die Resultate der vorliegenden Arbeit sichern kann. — Übrigens werden wir später an Gebieten mit Ecken bzw. Kanten im wesentlichen nur Quadrate bzw. Würfel zu betrachten haben; hierüber kennen wir die Eigenfunktionen explizite und stellen fest, daß sie noch in den Ecken bzw. Kanten stetige Ableitungen besitzen.

Der Beweis dieses Hilfssatzes beruht auf der Anwendung der Schwarzschen Ungleichung

$$\left(\int \psi \cdot \chi dt\right)^2 \leq \int \psi^2 dt \cdot \int \chi^2 dt,$$

welche für irgend zwei Funktionen ψ, χ von t gilt, wenn die betreffenden Integrale existieren.

Es sei zunächst $L(u) = \Delta u$, $k = 1$. Wir betrachten vorab ein Gebiet T von folgender Gestalt (vgl. Fig. 1). Die Begrenzung wird gebildet

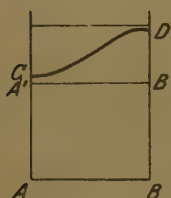


Fig. 1.

von drei sich rechtwinklig schneidenden geraden Strecken CA , AB , BD und einem mit stetiger Tangente versehenen Kurvenstück CD , welches ganz in dem durch AC und BD definierten Parallelstreifen liegt. Der Höchstwert des Abstandes eines Punktes auf CD von AB sei kleiner als eine positive Größe $2h$; andererseits möge die Kurve CD die im Abstände h zu AB durch das Gebiet T gelegte Parallele $A'B'$ nicht treffen. Schließlich soll der Winkel, den die Tangente in einem beliebigen Punkte von CD mit der Richtung AB einschließt, absolut genommen, einen festen, unterhalb 90° gelegenen Wert, etwa 60° nicht übersteigen; AB falle in die x -Achse, AC sei parallel zur y -Achse.

Es sei φ eine im Bereiche T stetige, stückweise stetig differenzierbare Funktion, deren Dirichletsches Integral

$$\iint_T \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = D_T$$

existiert. Wir setzen ferner

$$(16) \quad \int_T \varphi^2 dx dy = a^2.$$

Die Werte von φ auf dem Kurvenstück CD bezeichnen wir mit $\varphi(s)$, indem wir die Abhängigkeit von der Bogenlänge s zum Ausdruck bringen.

Vermöge der Schwarzschen Ungleichung folgt aus der Identität

$$\varphi(x, y_1) - \varphi(x, y_0) = \int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy$$

für die Differenz zwischen einem Werte $\varphi(s)$ und einem Werte φ_0 , der zu einem Punkte mit derselben x -Koordinate wie der durch den Wert von s definierte Randpunkt und einer zwischen 0 und h liegenden y -Koordinate y_0 gehört,

$$[\varphi(s) - \varphi_0]^2 \leq |y(s) - y_0| \int_{y_0}^{y(s)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 dy < 2h \int_{y_0}^{y(s)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 ds.$$

Integrieren wir diese Beziehung über alle Werte von x zwischen den Abszissen x_0 und x_1 der Punkte A und B , wobei φ_0 bei festem y_0 ebenso wie $\varphi(s)$ als Funktion von s oder als Funktion von x angesehen werden kann, so folgt

$$\int_{x_0}^{x_1} [\varphi(s) - \varphi_0]^2 dx < 2h D_T.$$

Wegen $\left| \frac{ds}{dx} \right| < 2$ ergibt sich, wenn wir links als Integrationsvariable s einführen,

$$(17) \quad \int [\varphi(s) - \varphi_0]^2 ds < 4h D_T.$$

Schließlich bemerken wir, daß aus der Beziehung (16) die Existenz eines Wertes y_0 folgt, für den

$$(18) \quad \int_{s_0}^{s_1} \varphi_0^2 ds \leq 2 \int_{x_0}^{x_1} \varphi_0^2 dx \leq 2 \frac{a^2}{h}$$

ist. Man erkennt dies unmittelbar, wenn man das über das Rechteck $BA'B'$ erstreckte Integral von φ^2 als Sukzession zweier einfacher Integrale, erst nach x , dann nach y , auffaßt und beachtet, daß dieses Integral sicher kleiner oder gleich a^2 ist.

Nach diesen Vorbereitungen zerlegen wir den Rand R unseres Gebietes G in eine endliche Anzahl m von Stücken mit stetiger Tangente, derart, daß in jedem Stück die Tangente sich um weniger als 60 Grad dreht, und schließen an jedes dieser Randstücke ein Teilgebiet von G an, welches den soeben betrachteten Typus T zeigt. Wir denken uns dabei die Zahl h so klein gewählt, daß diese Teilgebiete, die wir mit $T_1, T_2, \dots, T_m$ bezeichnen wollen, keinen Punkt von G mehr als dreimal überdecken, behalten uns aber im übrigen die Verfügung über die Kleinheit von h vor.

Ist φ eine der Bedingung (15) für $k=1$ genügende Funktion, und bezeichnet a_i^2 den Wert des über T_i erstreckten Integrales von φ^2 , so folgt jedenfalls

$$(19) \quad \sum_{i=1}^m a_i^2 \leq 3.$$

Addiert man ferner sämtliche durch die Beziehung (17) für die Gebiete T gegebenen m Ungleichungen, so ergibt sich

$$(20) \quad \int_R [\varphi(s) - \varphi_0]^2 ds < 4h (D_{T_1} + D_{T_2} + \dots + D_{T_m}) < 12h D[\varphi],$$

wobei die Werte $\varphi_0 = \varphi_0(s)$ für jedes Stück des Randes durch die oben getroffene Festsetzung definiert sind.

Setzen wir noch zur Abkürzung

$$\int_R \varphi(s)^2 ds = r^2, \quad \int_R \varphi_0^2 ds = r_0^2, \quad r \geq 0, \quad r_0 \geq 0,$$

und beachten, daß aus der Schwarzischen Ungleichung

$$\left(\int_R \varphi \cdot \varphi_0 ds \right)^2 \leq r^2 r_0^2$$

folgt, so ergibt sich aus (20)

$$12 h D[\varphi] > r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 = (r - r_0)^2.$$

Andererseits liefert die Addition der Ungleichungen (18) für die Bereiche T_i unter Berücksichtigung von (19)

$$\int_R \varphi_0^2 ds = r_0^2 < \frac{6}{h}.$$

Mithin ist

$$(21) \quad r^2 = \int_R \varphi^2 ds < \left(\sqrt{12} \sqrt{h} \sqrt{D[\varphi]} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{h}} \right)^2.$$

Die Zahl h in dieser Ungleichheit ist — von einem gewissen Kleinheitsgrad an — frei verfügbar und kann mit $D[\varphi]$ verändert werden. Setzen wir, was erlaubt ist, sobald $D[\varphi]$ eine gewisse Grenze überschritten hat,

$$h = \{D[\varphi]\}^{-\frac{1}{2}},$$

so folgt aus (21)

$$(22) \quad \int_R \varphi^2 ds < C \sqrt{D[\varphi]},$$

und somit für *alle* Funktionen φ

$$\int_R \varphi^2 ds < C \sqrt{D[\varphi]} + C',$$

wobei C und C' numerische positive Konstanten sind.

Hiermit ist der Hilfssatz bewiesen, vorausgesetzt, daß $p = k = 1$, $q = 0$, $\sigma = 1$ ist. Für den allgemeinen Fall folgt er hieraus unmittelbar wegen der Beschränktheit von p, q, k, σ , und wegen der durchweg geltenden Beziehungen $p > 0$, $k > 0$. Denn einerseits ergibt sich aus (15) und aus der Beziehung $k > c$, wo c eine positive Konstante ist, die Beschränktheit von $\iint_G \varphi^2 dx dy$, andererseits ist

$$\left| \int_R p \sigma \varphi^2 ds \right| < c' \int_R \varphi^2 ds,$$

wo c' eine andere positive Konstante ist, und schließlich erkennt man, daß die Ausdrücke $D[\varphi]$ und der spezielle Ausdruck für $D[\varphi]$ im Falle $p = k = 1$, $q = 0$ gleichzeitig und von derselben Ordnung ins Unendliche wachsen. Damit aber ist der allgemeine Fall auf den besonderen zurückgeführt.

Als erste Folgerung aus dem Hilfssatz ergibt sich die Tatsache, daß der Satz 3 des § 1 auch dann noch gilt, wenn die Funktion σ auf R negative Werte annehmen kann. Die Schlüsse von § 1 beruhten darauf, daß unterhalb einer festen Schranke nur endlich viele Eigenwerte liegen, so daß man die Eigenwerte in eine ansteigende Reihe ordnen kann. Dies ist auch der Fall, wenn nicht durchweg $\sigma \geq 0$. Denn aus dem Hilfssatz folgt

Satz 4. Die Differentialgleichung $L(u) + \lambda ku = 0$ kann auch bei der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = -\sigma u$ nur endlich viele negative Eigenwerte haben.

In der Tat, da sicher nur endlich viele Eigenwerte absolut genommen unterhalb einer endlichen Schranke liegen, muß, von endlich vielen Eigenwerten und Eigenfunktionen abgesehen, der Ausdruck

$$\lambda = D[u] + \int_R p \sigma u^2 ds$$

für eine Eigenfunktion u absolut genommen größer als eine beliebig vorgegebene Zahl d sein. Wenn d über alle Grenzen wächst, kann $D[u]$ nicht beschränkt bleiben, weil sonst dem Hilfssatz zufolge auch das Randintegral mithin der Betrag von λ beschränkt bliebe. Wenn aber $D[u]$ hinreichend groß ist, so beträgt nach dem Hilfssatz das Randintegral absolut genommen nur einen beliebig kleinen Bruchteil von $D[u]$, mithin ist dann der Eigenwert λ positiv, da $D[u]$ positiv ist. — Satz 4 erscheint an sich bemerkenswert, weil er besagt, daß der wesentlich positive Charakter der Eigenwerte durch die Randbedingung nicht beeinflusst wird, sondern lediglich auf der elliptischen Natur der Differentialgleichung beruht.

§ 3.

Die Maximum-Minimum-Eigenschaft der Eigenwerte und Eigenfunktionen.

Die oben entwickelten klassischen Minimaleigenschaften stellen eine rekurrente Definition der Eigenwerte und Eigenfunktionen dar und sind deshalb ungeeignet, die Grundlage einer Untersuchung zu bilden, welche sich direkt auf den n -ten Eigenwert bezieht. Der gekennzeichnete Übelstand läßt sich jedoch durch folgende Bemerkung beseitigen:

Wir betrachten irgendeines der in § 1 untersuchten Variationsprobleme, etwa das allgemeinste aus Satz 3, und modifizieren es dadurch, daß wir der Funktion φ statt der Bedingungen (14) die $n - 1$ veränderten Bedingungen

$$(23) \quad \iint_G k \varphi v_i dx dy = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, (n - 1))$$

auferlegen, wobei $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ irgendwie gewählte in G stückweise

stetige Funktionen sind. Ob und wann das so entstehende Variationsproblem eine Lösung besitzt, bleibe dahingestellt. Jedenfalls aber werden die Dirichletschen Integrale $D[\varphi]$ oder allgemeiner die Ausdrücke $\mathfrak{D}[\varphi]$ unter den gestellten Bedingungen eine *untere Grenze* besitzen, welche von den Funktionen $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ abhängig ist und mit $d\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ bezeichnet werden soll. Wir können nun leicht folgende Tatsache beweisen: *Die untere Grenze $d\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ des modifizierten Variationsproblems ist stets kleiner oder gleich dem Minimum λ_n bei dem ursprünglichen Variationsproblem, d. h. es gilt*

$$(24) \quad d\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\} \leq \lambda_n = d\{u_1, u_2, \dots, u_{n-1}\}.$$

Zum Beweise¹¹⁾ bilden wir aus den ersten n Eigenfunktionen $u_1, u_2, \dots, u_n$ des Randwertproblems mit n Konstanten $c_1, c_2, \dots, c_n$ eine lineare Kombination

$$\varphi = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n,$$

welche den n Bedingungen (23) und der Bedingung

$$(15) \quad \int_G k \varphi^2 dx dy = 1$$

genügt. Die Bedingungen (23) stellen $n - 1$ homogene lineare Gleichungen für die n Größen c_i dar, während die Relation (15) wegen der Orthogonalität der Funktionen u_i gleichbedeutend ist mit

$$(25) \quad c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2 = 1.$$

Die Bestimmung der c_i ist somit stets mindestens auf eine Art möglich. Die so gebildete Funktion φ genügt überall auf dem Rande R von G ebenso wie die Eigenfunktionen den gestellten Randbedingungen. Sie ist also im Variationsproblem konkurrenzfähig.

Aus der Greenschen Formel (11) folgt, wenn wir für f, φ zwei verschiedene Eigenfunktionen u_i, u_k einsetzen

$$D[u_i, u_k] + \int_R p \sigma u_i u_k ds = 0.$$

Mithin wird

$$\mathfrak{D}[\varphi] = D[\varphi] + \int_R p \sigma \varphi^2 ds = c_1^2 \lambda_1 + c_2^2 \lambda_2 + \dots + c_n^2 \lambda_n,$$

also ist wegen (25) und wegen $\lambda_i \leq \lambda_{i+1}$

$$\mathfrak{D}[\varphi] \leq \lambda_n.$$

Damit ist bewiesen, daß bei vorgegebenen Funktionen $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ der Ausdruck $\mathfrak{D}[\varphi]$ Werte annehmen kann, die jedenfalls nicht größer als λ_n sind, und daß somit auch die untere Grenze $d\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ diese

¹¹⁾ Vgl. eine analoge, auch sonst in der Literatur ähnlich vorkommende Schlussweise bei Weyl loc. cit.²⁾ A, S. 445.

Werte nicht größer als λ_n ist. Da für $v_1 = u_1, \dots, v_{n-1} = u_{n-1}$ diese untere Grenze gerade gleich λ_n wird, wie der § 1 lehrt, so erhalten wir folgendes grundlegende Resultat, welches die gesuchte independente Definition des n -ten Eigenwertes darstellt:

Satz 3a. *Es seien $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ in G $n-1$ stückweise stetige Funktionen, es sei ferner $d\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ das Minimum bzw. die untere Grenze aller Werte, welche der Ausdruck*

$$\mathfrak{D}[\varphi] = D[\varphi] + \int_R p \sigma \varphi^2 ds$$

annehmen kann, wenn φ irgendeine in G stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion ist, welche den Bedingungen

$$\iint k \varphi v_i dx dy = 0, \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

$$\iint k \varphi^2 dx dy = 1,$$

sowie einer der betrachteten Randbedingungen genügt. Dann ist der n -te Eigenwert λ_n der Differentialgleichung $L(u) + \lambda ku = 0$ für das Gebiet G und die betreffende Randbedingung gleich dem größten Wert, den diese untere Grenze annehmen kann, wenn für die $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ alle zulässigen Funktionensysteme in Betracht gezogen werden. Dieses Maximum-Minimum wird erreicht für $v_1 = u_1, \dots, v_{n-1} = u_{n-1}$; $\varphi = u_n$.

Von der Randbedingung $\varphi = 0$ abgesehen, dürfen die Randbedingungen in dem Variationsproblem fortgelassen werden.

Der algebraische Sinn dieser Maximum-Minimum-Eigenschaft erhellt aus dem Vergleich mit der folgenden, ganz ebenso zu beweisenden Eigenschaft der Hauptachsen eines m -dimensionalen Ellipsoides:

Ordnet man die Längen der Hauptachsen eines m -dimensionalen Ellipsoides in eine fallende Reihe, so ist die n -te dieser Zahlen gleich dem kleinsten Wert, welchen die Länge der größten Hauptachse eines $m - n + 1$ -dimensionalen auf dem ursprünglichen gelegenen Schnitte-ellipsoides annehmen kann, wenn die $m - n + 1$ -dimensionale Schnittebene alle möglichen Lagen durchläuft.

Das Resultat dieses Paragraphen ist unabhängig davon, ob das Gebiet G aus einem einzigen in sich zusammenhängenden Stück besteht. Es darf auch G aus einer Reihe von getrennten Gebieten $G', G'', G''', \dots$ gebildet sein, welche ihrerseits keine inneren Punkte gemein haben, aber wohl gemeinsame Randpunkte besitzen dürfen. Die Eigenwerte und Eigenfunktionen von G sind dann einfach die entsprechenden Eigenwerte und Eigenfunktionen der Teilgebiete $G', G'', G''', \dots$ zusammengenommen, wobei jede dieser Eigenfunktionen immer nur in ihrem zugehörigen Gebiet

$G^{(6)}$ von Null verschieden ist, und außerhalb als identisch Null fortgesetzt wird.

Physikalisch bedeutet dies die selbstverständliche Tatsache, daß bei einem Schwingungsvorgang, der mehrere voneinander getrennte Gebilde erfaßt, diese Gebilde unabhängig voneinander schwingen.

Ferner sei noch bemerkt, daß die hier dargelegte Maximum-Minimum-Eigenschaft, genau analog für *sich selbst adjungierte Differentialgleichungen höherer Ordnung*, z. B. die *Differentialgleichung der schwingenden Platte*

$$\Delta \Delta u + \lambda u = 0$$

herleiten läßt.

Man kann, worauf zum Schluß hingewiesen werden soll, die bewiesene Maximum-Minimum-Eigenschaft der Eigenwerte geradezu als Ausgangspunkt der Theorie der Eigenwerte wählen, indem man das Variationsproblem dieses Paragraphen an die Spitze stellt und den n -ten Eigenwert einfach als den Wert des Maximum-Minimums definiert. Man hat dabei unter dem Maximum-Minimum die obere Grenze der Werte $d\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ zu verstehen. Wie sich aus den Betrachtungen des nächsten Paragraphen unmittelbar ergibt, ist die Existenz des so definierten n -ten Eigenwertes einleuchtend¹²⁾, und zwar ganz gleich, ob der Rand Ecken bzw. Kanten und die Randbedingung Unstetigkeiten aufweisen oder nicht. Ferner gelten alle Betrachtungen und Sätze der folgenden Paragraphen ohne weiteres für diesen neuen Eigenwertbegriff. Man ist also durch die gegebene Definition in der Lage, die Theorie der Eigenwerte von der Theorie der Eigenfunktionen und den damit verbundenen Existenzschwierigkeiten vollständig unabhängig zu entwickeln und auf eine elementare Grundlage zu stellen¹³⁾.

¹²⁾ Man erhält nämlich auf Grund der Überlegungen des § 4 als obere Schranke für diesen Wert den n -ten Eigenwert irgendeines im Innern von G liegenden Quadrates für die Randbedingung $u = 0$, also eine wohlbekannte feste Zahl.

¹³⁾ Der hier ausgesprochene Gedanke wäre nichts als eine wenig interessante Abstraktion, wenn der neue Eigenwertbegriff nicht etwas Ähnliches besagte wie der übliche, mit dem er ja, den oben gewonnenen Resultaten zufolge, im allgemeinen gleichbedeutend ist. Ganz unabhängig aber von den vorangehenden Entwicklungen dieser Arbeit und für den allgemeinsten hier in Betracht gezogenen Fall ergibt sich, wie ich in einer folgenden Arbeit ausführlich zeigen werde, aus der Maximum-Minimum-Definition unschwer die Tatsache, daß man zu jedem Eigenwert λ Funktionen φ finden kann, welche den Randbedingungen genügen und für welche das Integral $\iint_G [L(\varphi) + \lambda k \varphi]^2 dx dy$ so klein wird wie man will. Diese „genäherten Eigenfunktionen“ genügen mit beliebig großer Genauigkeit denselben Relationen wie die exakten Eigenfunktionen, insbesondere der Orthogonalitätsrelation. Sie können also in gewisser Weise die Rolle der gewöhnlichen Eigenfunktionen übernehmen.

§ 4.

Folgerungen. Allgemeine Sätze über die Verteilung der Eigenwerte. Anwendung auf Schwingungsvorgänge.

Die Fruchtbarkeit der Resultate des vorangehenden Paragraphen beruht darauf, daß man die Maximum-Minimum-Eigenschaft in Zusammenhang bringen kann mit dem in der Einleitung erwähnten *Grundprinzip der Variationsrechnung*, wonach durch Verschärfung der Bedingungen in einem Minimumproblem der Wert des Minimums vergrößert, jedenfalls nicht verkleinert wird, und wonach umgekehrt bei Milderung der Bedingungen das Minimum fällt, jedenfalls nicht wächst.

Für die Schwingungsvorgänge der Physik können wir aus diesem Prinzip unmittelbar eine bedeutsame Folgerung ziehen. Wir betrachten irgendein schwingungsfähiges System, dessen Eigenschwingungen durch ein Eigenwertproblem der hier behandelten Art charakterisiert werden, wobei an Stelle der sich selbst adjungierten partiellen elliptischen Differentialgleichung 2. Ordnung auch eine solche höherer Ordnung oder ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen treten darf. Dann beachten wir, daß irgendwelche Zwangsbedingungen, unter denen das System seine Schwingungen auszuführen genötigt wird, sich mathematisch als Nebenbedingungen für die in dem Variationsproblem auftretenden Konkurrenzfunktionen φ aussprechen. Werden in dem Maximum-Minimumproblem die Bedingungen für φ verschärft, so wird jedesmal bei festgehaltenem System der Funktionen $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ die untere Grenze $\mu\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ vergrößert oder jedenfalls nicht verkleinert, mithin gilt dasselbe für das Maximum dieser unteren Grenzen, den n -ten Eigenwert. Entsprechend wird der Wert des Maximum-Minimums, d. h. der n -te Eigenwert verkleinert oder jedenfalls nicht vergrößert, wenn die Bedingungen für die Funktionen φ gemildert werden.

Physikalisch besagt dies:

Satz 5. *Wird ein schwingungsfähiges System gezwungen, unter Zwangsbedingungen zu schwingen, so ändern sich der Grundton und jeder Oberton nie anders als in wachsendem Sinne. Werden umgekehrt Bedingungen, unter denen ein System schwingt, aufgehoben, so ändern sich der Grundton und jeder Oberton nie anders als in abnehmendem Sinne. Dabei können als Zwangsbedingungen auch innere Bedingungen des Problems angesehen werden.*

Beispielsweise muß sich bei einer *eingespannten schwingenden elastischen Membran* der Grundton und sämtliche Obertöne in dem angegebenen wachsenden Sinne ändern, wenn die Membran außer am Rande noch sonst an Linien- oder Flächenstücken festgehalten wird. Dagegen wird sich der

Grundton und alle Obertöne bei einer Membran in fallendem Sinne ändern, wenn sie einen *Riß* erhält, oder bei einer *schwingenden Platte* wenn das Material einen „*Sprung*“ bekommt. Im letzteren Falle werden nämlich für die Konkurrenzfunktionen φ bzw. für deren Ableitungen an der Stelle des Risses oder Sprunges die Bedingungen der Stetigkeit aufgehoben¹⁴⁾.

Mathematisch ergeben sich aus unserem Prinzip eine Reihe von wichtigen *allgemeinen Sätzen über die Eigenwertverteilung* bei den betrachteten Randwertaufgaben. Der erste Satz bezieht sich auf die Randbedingung $u = 0$ und vergleicht die Eigenwertverteilung für ein Gebiet G mit der für Teilgebiete desselben. Der zweite Satz leistet das entsprechende für die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$. Die weiteren Sätze beziehen sich auf die allgemeineren Randbedingungen und vergleichen die Spektra der Differentialgleichung für verschiedene Formen dieser Randbedingungen.

Satz 6. *Es seien $G', G'', G''', \dots$ eine Anzahl von Teilgebieten des Gebietes G , welche keine gemeinsamen inneren Punkte haben. Dann ist die Anzahl $A(\lambda)$ der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte der Differentialgleichung $L(u) + \lambda ku = 0$ für das Gebiet G bei der Randbedingung $u = 0$ mindestens so groß wie die gesamte Anzahl der unter derselben Grenze entsprechenden gelegenen Eigenwerte der Teilgebiete $G^{(i)}$ bei derselben Randbedingung¹⁵⁾.*

Dieser Satz läßt sich auch so aussprechen: *Bei der Randbedingung $u = 0$ ist der n -te Eigenwert λ_n des Gebietes G kleiner oder gleich der n -ten Zahl λ_n^* aus der Gesamtmenge der nach steigender Größe geordneten, in ihrer richtigen Vielfachheit gezählten Eigenwerte der Teilgebiete $G^{(i)}$.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus folgender Überlegung. Legt man in dem Maximum-Minimum-Problem, welches den Eigenwert λ_n definiert, den Funktionen φ die neue Bedingung auf, an allen Rändern der Teilgebiete $G^{(i)}$ und in dem ganzen, zu keinem der $G^{(i)}$ gehörigen Teile von G zu verschwinden, so wird einerseits dem oben formulierten Grundprinzip zufolge der Wert des Maximum-Minimums vergrößert, jedenfalls nicht verkleinert. Andererseits ist das neuentstehende Maximum-Minimum-Problem gerade dasjenige, welches den n -ten Eigenwert des aus den getrennten Gebieten $G', G'', \dots$ bestehenden Gebietes definiert, d. h. der neue Wert des Maximum-Minimums ist gleich λ_n^* , und somit gilt $\lambda_n \leq \lambda_n^*$, wie behauptet wurde.

¹⁴⁾ Hiermit scheint die bekannte Tatsache zusammenzuhängen, daß ein Porzellanteller, welcher einen „Sprung“ erhält, seinen ursprünglichen Klang verliert und dumpf klingt.

¹⁵⁾ Vgl. den entsprechenden Satz für die Differentialgleichung (1) bei Weyl C. Desgl. die oben zitierte Note des Verfassers.

Insbesondere ergibt sich aus dem bewiesenen Satze eine wichtige Eigenschaft der zur Randbedingung $u = 0$ gehörigen Eigenwerte λ_n , die man zweckmäßig als die *Eigenschaft der Monotonität* bezeichnen kann.

Satz 7. *Der zur Randbedingung $u = 0$ gehörige n -te Eigenwert eines Gebietes G ist nie größer als der zur selben Randbedingung gehörige n -te Eigenwert eines Teilgebietes.*

Der in Satz 6 ausgesprochenen Tatsache steht für die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ eine entsprechende gegenüber:

Satz 8. *Es seien $G', G'', G''' \dots$, eine endliche Anzahl von Teilgebieten, welche das Gebiet G lückenlos ausfüllen. Dann ist die Anzahl $\nu(\kappa)$ der unterhalb einer Grenze κ gelegenen, zur Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ gehörigen Eigenwerte der Differentialgleichung $L(u) + \lambda \kappa u = 0$ für das Gebiet G kleiner oder höchstens gleich der gesamten Anzahl der zur selben Randbedingung gehörigen, unter derselben Grenze κ gelegenen Eigenwerte der Differentialgleichung für die Teilgebiete $G^{(i)}$.*

Man kann diesen Satz auch folgendermaßen aussprechen: *Es sei κ_n^* die n -te der nach wachsender Größe geordneten Zahlen aus der Gesamtmenge der zu den Teilgebieten $G^{(i)}$ und der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ gehörigen Eigenwerte, wobei jeder mit der richtigen Vielfachheit zu zählen ist, dann ist der n -te Eigenwert κ_n des Gebietes G für dieselbe Randbedingung größer oder gleich der Zahl κ_n^* .*

Auch hierfür folgt der Beweis fast unmittelbar durch Anwendung unseres allgemeinen Prinzips auf das Maximum-Minimum-Problem, welches den n -ten Eigenwert κ_n von G charakterisiert. Denn wenn wir in diesem Problem den zur Konkurrenz zuzulassenden Funktionen q gestatten, auf den in G verlaufenden Randlinien der Gebiete $G^{(i)}$ derart unstetig zu sein, daß sie beim Überschreiten dieser Linien endliche Sprünge machen, so wird durch diese Milderung der Bedingungen der Wert des Maximum-Minimums verkleinert oder jedenfalls nicht vergrößert. Andererseits definiert das modifizierte Maximum-Minimum-Problem nach § 3 gerade den n -ten zur Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ gehörigen Eigenwert des Gebietes, welches aus den getrennten Gebieten $G^{(i)}$ besteht, d. h. den Wert κ_n^* . Hiermit ist die Relation $\kappa_n \geq \kappa_n^*$ bewiesen¹⁴⁾.

¹⁴⁾ Die obigen Sätze 6, 7, 8 gelten, gleichviel ob die Teilgebiete Ecken haben oder nicht. Will man im Falle des Auftretens von Ecken den Beweis von der Kenntnis der Existenz und der Eigenschaften der Eigenfunktionen unabhängig machen und auf die Maximum-Minimum-Definition der Eigenwerte stützen, so verfährt man in diesem Zusammenhange am kürzesten folgendermaßen: Zum Beweise von Satz 6 betrachte man statt der Gebiete $G^{(i)}$ zunächst Gebiete $G_m^{(i)}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$), wobei

Die nachfolgenden Sätze geben Aufschluß über das *gegenseitige Verhältnis der Spektren* der Differentialgleichung bei den verschiedenen Arten der vorkommenden Randbedingungen.

Satz 9. Es sei λ_n für das Gebiet G der n -te zur Randbedingung $u = 0$ gehörige Eigenwert der Differentialgleichung $L(u) + \lambda ku = 0$, κ_n der n -te Eigenwert für die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$, schließlich μ_n der n -te Eigenwert für die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$ oder allgemeiner $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$ auf einem Teile R' des Randes R , $u = 0$ auf dem übrigen Teile R'' des Randes. Dann ist stets

$$(26) \quad \mu_n \leq \lambda_n,$$

und bei nicht negativem σ

$$(26a) \quad \kappa_n \leq \mu_n.$$

Mit andern Worten besagt der Satz, daß unter den betrachteten Randbedingungen $u = 0$ die schärfste, und wenn σ nicht negativ wird, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ die mildeste ist.

$G_m^{(i)}$ in $G^{(i)}$ liegt, keine Ecken mehr besitzt und mit wachsendem m gegen $G^{(i)}$ konvergiert. Für die $G_m^{(i)}$ gilt der Beweis des Textes. Andererseits konvergieren die Eigenwerte der $G_m^{(i)}$ gegen die der $G^{(i)}$, wie die lediglich auf der Maximum-Minimum-Eigenschaft beruhenden Ausführungen am Schluß des folgenden Paragraphen zeigen. Hieraus aber folgt unmittelbar der Satz 6 für die Gebiete $G^{(i)}$.

Zum Beweise von Satz 8 modifizieren wir das ursprüngliche Maximum-Minimum-Problem, welches den n -ten Eigenwert von G definiert, dadurch, daß wir wie oben im Text den Funktionen φ auf den in G liegenden Randstücken der $G^{(i)}$ endliche Sprünge gestatten, und daß wir darüber hinaus von jeder der Funktionen v_i identisches Verschwinden in allen Gebieten $G^{(i)}$ mit Ausnahme je eines verlangen. Der Wert des Maximum-Minimums bei dem so modifizierten Variationsproblem ist der n -te unter den zur Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ gehörigen nach der Größe geordneten Eigenwerten der sämtlichen $G^{(i)}$. Andererseits wurde durch Erweiterung der Zulassungsbedingungen für die Funktion φ jeder Wert $d\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ verringert oder nicht vergrößert und desgleichen durch die Verringerung des Variabilitätsbereiches der Funktionen v_i die obere Grenze dieser Werte $d\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ wiederum verringert oder nicht vergrößert. Hieraus folgt der Satz unmittelbar wie im Text.

Es bedürfte dieser Überlegungen gar nicht, wenn man sich auf den Satz stützen würde, daß auch bei Zugrundelegung der Maximum-Minimum-Definition des n -ten Eigenwertes die Eigenwerte eines aus getrennten Gebieten bestehenden Gebietes mit denen der Teilgebiete identisch sind. Dann bleiben einfach die Überlegungen des Textes unverändert bestehen. Der genannte Satz ist jedoch hier nicht, wie bei der klassischen Eigenwertdefinition, trivial, und sein Beweis würde nicht kürzer sein als die hier gemachten Ausführungen.

Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß uns diese Betrachtungen von allen durch Ecken bzw. Kanten entstehenden Schwierigkeiten befreien.

Der eine Teil des Satzes, nämlich die Beziehung $\kappa_n \leq \mu_n$ folgt aus der Tatsache, daß für $\sigma \geq 0$ stets das im Ausdruck $\mathfrak{D}[\varphi]$ auftretende Randintegral größer, wenigstens aber gleich Null wird, daß also hier stets

$$\mathfrak{D}[\varphi] \geq D[\varphi]$$

t. Daher aber ist auch die untere Grenze der linken Seite bei gegebenen Funktionen $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ größer oder gleich der unteren Grenze der rechten Seite, also stehen auch die Maxima dieser unteren Grenzen in derselben Beziehung, d. h. es gilt eben $\mu_n \geq \kappa_n$.

Um den zweiten Teil der Behauptung, d. h. die Ungleichung $\mu_n \leq \lambda_n$ einzusehen, betrachten wir ein Teilgebiet G' von G und dessen zur Randbedingung $u = 0$ gehörigen n -ten Eigenwert λ'_n . Wenn wir in dem Maximum-Minimum-Problem, welches den n -ten Eigenwert μ_n von G charakterisiert, der Funktion φ die weitere Bedingung auferlegen, überall in G außerhalb G' zu verschwinden, so wird sicher der Wert des Maximum-Minimums verkleinert oder nicht vergrößert. Andererseits ist dieser neue Maximum-Minimum-Wert offenbar mit λ'_n identisch. Es gilt also $\mu_n \leq \lambda'_n$. Nun ist aber, wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden, der n -te, zur Randbedingung $u = 0$ gehörige Eigenwert λ'_n eine stetige Funktion des Gebietes. Wenn also das Gebiet G' so gewählt wird, daß es das Gebiet G hinreichend genau approximiert, so unterscheidet sich λ'_n von λ_n um beliebig wenig. Also gilt auch $\mu_n \leq \lambda_n$, wie behauptet wurde.

Bei den Anwendungen des Satzes 9 müssen wir beachten, daß die Zahlen der betreffenden Eigenwerte unterhalb einer gegebenen Grenze in der umgekehrten Größenbeziehung stehen wie die Eigenwerte selbst.

Zusatz zu Satz 9. *Die Aussage von Satz 9 bleibt bestehen, wenn an die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$ nicht überall, sondern nur auf einem Teile des Randes R oder des Randstückes R' durch die Bedingungen $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ bzw. $u = 0$ ersetzt.*

Der Beweis folgt genau so wie der des Satzes 9 selbst.

Satz 10. *Wenn in der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$ auf R die Funktion σ entweder an jeder Stelle vergrößert oder verkleinert wird¹⁷⁾, so kann sich jeder einzelne Eigenwert nur im selben Sinne ändern.*

Auch diese sehr bemerkenswerte Tatsache ist eine unmittelbare Folge der Maximum-Minimum-Eigenschaft. Denn der Ausdruck $\mathfrak{D}[\varphi]$ ändert sich bei gleichsinniger Änderung der Funktion σ für jedes φ im selben Sinne wie σ , also auch seine untere Grenze bei gegebenen v , und damit das Maximum dieser unteren Grenze.

¹⁷⁾ Dabei ist natürlich auch eine Änderung um Null zugelassen.

Wir erkennen aus den letzten Sätzen, daß die Eigenwerte für die verschiedenen Randbedingungen in charakteristischen Beziehungen zueinander stehen. Ändert man die Funktion σ an jeder Stelle monoton von 0 bis ∞ , so wächst jeder einzelne Eigenwert monoton von dem Werte, den er bei der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ hat, bis zu dem Werte, den er bei der Randbedingung $u = 0$ erhält.

Wir werden im nächsten Paragraphen erkennen, daß dieses *Wachstum stetig vor sich geht*. Weiter wird die Untersuchung der asymptotischen Eigenwertverteilung zeigen, daß trotz des gekennzeichneten Verhaltens der Eigenwerte doch der asymptotische Wert des n -ten Eigenwertes unabhängig von der Randbedingung bleibt, daß sich also das Wachstum des Eigenwertes bei Wachsen der Funktion σ nur in einem zur Größe des Eigenwertes unvergleichlich geringen Spielraum vollzieht.

Auch die hier zuletzt entwickelten Tatsachen haben sämtlich eine einfache *physikalische Bedeutung*. Wir erkennen nämlich in der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ die eines sogenannten „*freien Randes*“, d. h. eines solchen, wo bei dem Schwingungsvorgang keinerlei Randbedingung gestellt ist, wo z. B. im Falle der Akustik die schwingenden Massen am Rande in keiner Weise festgehalten werden. Die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$ entspricht einem mit elastischen Kräften gehaltenen Rande, wobei die Größe der festhaltenden Kraft durch die Funktion σ bestimmt ist. Die Bedingung $u = 0$ stellt den Fall dar, wo diese Kraft unendlich groß geworden ist, d. h. der Rand absolut festgehalten wird.

§ 5.

Weitere Folgerungen. Stetigkeitseigenschaften.

Die Maximum-Minimum-Eigenschaft des n -ten Eigenwertes gestattet uns, ohne Schwierigkeiten die Abhängigkeit der Eigenwerte von den Koeffizienten der Differentialgleichung, den Randbedingungen und dem Gebiet G zu untersuchen.

Satz 11. Wenn in der Differentialgleichung $L(u) + \lambda ku = 0$ der Koeffizient k an jeder Stelle im selben Sinne verändert wird, so ändert sich bei jeder Randbedingung der n -te Eigenwert im entgegengesetzten Sinne; wird der Koeffizient p überall gleichsinnig verändert, so ändert sich jeder Eigenwert im selben Sinne; im Falle der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$ ist hierbei $\sigma \geq 0$ vorzusetzen.

In der Tat, es werde zunächst p überall gleichsinnig verändert. Dann ändert sich für jede konkurrenzfähige Funktion φ der Wert des Ausdruckes $\mathfrak{D}[\varphi]$ monoton im selben Sinne, mithin auch die untere Grenze dieser Werte

festen v_i , also auch das Maximum dieser unteren Grenzen, der n -te Eigenwert. Wird k monoton verändert, etwa in k' , so wird eine Funktion φ , welche vorher den Konkurrenzbedingungen genügte, dies nicht mehr tun, vielmehr muß sie, um nunmehr der Bedingung

$$\iint_G k' \varphi^2 dx dy = 1$$

genügen, mit einem gewissen konstanten Faktor multipliziert werden, der kleiner als 1 resp. größer als 1 wird, je nachdem k wachsend oder fallend sich geändert hat. Die mit diesem Faktor multiplizierte Funktion φ werde φ' genannt. Da dieser Faktor quadratisch in $\mathfrak{D}[\varphi]$ eingeht, so nennt man, daß je nach der Art der Änderung von k die untere Grenze der Werte $\mathfrak{D}[\varphi]$ bei festgehaltenen Funktionen v_i nicht kleiner bzw. nicht größer wird, als die untere Grenze der Ausdrücke $\mathfrak{D}[\varphi']$, wobei hier v_i an Stelle der Funktionen v_i entsprechend der Verwandlung von k in k' die Funktionen $v'_i = v_i \frac{k}{k'}$ getreten sind. Da das System der Funktionen v'_i zugleich mit dem der Funktionen v_i den ganzen Bereich der zulässigen Funktionssysteme erschöpft, so folgt ebenso wie oben, daß das Maximum der unteren Grenzen von $D[\varphi]$ und $D[\varphi']$ in der umgekehrten Größenziehung zueinander stehen wie die Funktionen k und k' .

Aus der so bewiesenen Tatsache ergibt sich die *Stetigkeit der Eigenwerte* in ihrer Abhängigkeit von p und k . Wenn nämlich zunächst die Funktion k in k' geändert wird und dabei $0 < (1 - \varepsilon)k \leq k' \leq (1 + \varepsilon)k$, wobei ε eine positive Zahl verstanden, so muß infolge des Satzes 11 der n -te Eigenwert der Differentialgleichung für die Funktion k' zwischen den n -ten Eigenwerten liegen, die wir erhalten, wenn wir in der Differentialgleichung k durch $k(1 - \varepsilon)$ bzw. $k(1 + \varepsilon)$ ersetzen. Das aber sind offenbar der mit den Faktoren $(1 - \varepsilon)^{-1}$ bzw. $(1 + \varepsilon)^{-1}$ multiplizierte n -te Eigenwert der ursprünglichen Differentialgleichung. Wenn ε hinreichend klein genommen wird, so liegen diese beiden Zahlen beliebig nahe beieinander, und damit ist die behauptete Stetigkeitseigenschaft bewiesen.

Genau so verläuft der Beweis, wenn p geändert wird, vorausgesetzt, daß die in der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$ auftretende Funktion σ nirgends negativ wird. Ist dies nicht der Fall, so beachte man, daß nach dem Hilfssatz in § 2 jedenfalls das Randintegral $\int_R p \sigma \varphi^2 ds$ mit $D[\varphi]$ und $\mathfrak{D}[\varphi]$ gleich beschränkt bleibt. Da man nun in dem Maximum-Minimum-Problem, welches den n -ten Eigenwert definiert, für die Werte von $\mathfrak{D}[\varphi]$

von vornherein eine geeignete obere Schranke festsetzen darf¹⁸⁾, ohne die Lösung des Variationsproblems zu ändern, so folgt, daß eine hinreichend kleine Änderung der Funktion p das Randintegral für alle bei Innehaltung dieser Schranke zulässigen Funktionen φ um beliebig wenig verändert, woraus sich wiederum die Stetigkeit des n -ten Eigenwertes als Funktion von p ergibt.

Ebenso hängt der n -te Eigenwert stetig von q ab. Es folgt nämlich aus der Relation $k \geq k_m$, wo k_m eine positive Konstante ist,

$$1 = \iint_G k \varphi^2 dx dy \geq k_m \iint_G \varphi^2 dx dy.$$

Somit ist für alle zulässigen Funktionen φ das Integral $\iint_G \varphi^2 dx dy$ beschränkt. Daraus ergibt sich, daß bei hinreichend kleiner Änderung der Funktion q sich der Ausdruck $\mathfrak{D}[\varphi]$ um beliebig wenig ändert, und zwar um gleichmäßig wenig für alle zulässigen Funktionen φ . Also gilt dasselbe für das Maximum-Minimum von $\mathfrak{D}[\varphi]$.

Zusammenfassend erhalten wir das Resultat:

Satz 12. *Der n -te Eigenwert der Differentialgleichung $L(u) + \lambda ku = 0$ ändert sich für alle betrachteten Randbedingungen stetig mit den Koeffizienten der Differentialgleichung.*

In ähnlicher Weise erkennt man die Stetigkeit der Eigenwerte in ihrer Abhängigkeit von der in der Randbedingung auftretenden Funktion σ . Wir dürfen wiederum von vornherein in dem Variationsproblem voraussetzen, daß die Ausdrücke $\mathfrak{D}[\varphi]$ unterhalb einer festen Schranke liegen. Dann liegt auch das Randintegral $\int_R \varphi^2 ds$ unterhalb einer festen Schranke. Ändern wir also in dem Randintegral $\int_R p \sigma \varphi^2 ds$ die Funktion σ um hinreichend wenig, so ändert sich auch dieses Randintegral um gleichmäßig beliebig wenig, somit gilt dasselbe für $\mathfrak{D}[\varphi]$ und daher auch für das Maximum-Minimum von $\mathfrak{D}[\varphi]$. Wir haben also das Resultat:

Satz 12a. *Der n -te Eigenwert ändert sich stetig mit der in der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$ auftretenden Funktion σ .*

Wir untersuchen schließlich die Stetigkeitseigenschaften des n -ten Eigenwertes als Funktion des Gebietes G und wollen dabei zeigen, daß der n -te Eigenwert eines Gebietes G' den n -ten Eigenwert des Gebietes G

¹⁸⁾ Etwa den zur Randbedingung $u = 0$ gehörigen n -ten Eigenwert eines beliebigen im Innern von G liegenden Quadrates. Denn zufolge der Sätze 9 und 7 ist der betrachtete n -te Eigenwert von G sicher kleiner als der eines solchen Quadrates. Die Festsetzung dieser oberen Schranke für $\mathfrak{D}[\varphi]$ kann also an der Lösung Maximum-Minimum-Problems nichts ändern.

ei entsprechenden Randbedingungen beliebig genau approximiert, wenn das Gebiet G durch das Gebiet G' hinreichend genau approximiert wird. Dabei müssen wir jedoch den Begriff der *Approximation eines Gebietes G durch ein anderes G' genügend scharf fassen*. Sobald in den Randbedingungen normale Ableitungen auftreten, werden wir uns nicht mehr, wie es in der Analysis situs üblich ist, damit begnügen können, daß der Rand von G' den Rand von G approximiert, wir werden vielmehr verlangen müssen, daß auch die *Normalen* des Randes von G' die des Randes von G approximieren. In der Tat kann man zeigen, daß bei der milderen Auffassung der Approximation der n -te Eigenwert nicht eine stetige Funktion des Gebietes zu sein braucht¹⁹⁾.

Analytisch können wir die Approximation des Gebietes G durch das Gebiet G' im schärferen Sinne folgendermaßen kennzeichnen.

Das Gebiet G' geht mit Einschluß des Randes punktweise in das Gebiet G mit Einschluß des Randes über durch Transformationsgleichungen der Form

$$(7) \quad x' = x + g(x, y), \quad y' = y + h(x, y),$$

wo bei die Funktionen g, h im ganzen Gebiet stetig und mit stückweise

¹⁹⁾ Als einfachstes Beispiel für dieses Vorkommnis diene folgendes: Es sei $(\varphi) = \Delta \varphi$, $k = 1$. G sei ein Quadrat von der Seite 1. Außerhalb G , zu G parallel orientiert und der Mitte einer der Seiten q von G gegenüber werde ein zweites Quadrat G_ε von der Seitenlänge ε im Abstände ε angebracht und sodann sein Inneres mit dem von G durch einen schmalen, senkrecht zur Mitte von q verlaufenden Steg S verbunden, welcher von zwei im Abstand η parallelen Geraden der Länge ε begrenzt wird. Das Gebiet G' möge aus den beiden Quadraten G und G_ε sowie dem Stege S bestehen. Der erste Eigenwert von G' bei der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ ist $\kappa_1 = 0$, die gehörige Eigenfunktion ist $u_1 = \text{const.}$ Wenn nun zu jedem ε die Breite η des Streifens S hinreichend klein gewählt wird, so kann auch der zweite Eigenwert von G' beliebig klein gemacht werden. Betrachten wir nämlich eine Funktion φ in G' , welche in G_ε gleich $-\frac{1}{\varepsilon}$, in G gleich einer Konstanten c ist und in S linear von c nach $-\frac{1}{\varepsilon}$ abfällt. Die Konstante c sei so bestimmt, daß das über G' erstreckte Integral von φ verschwindet. Wenn η hinreichend klein ist, wird sich c von 0 um beliebig wenig unterscheiden. Das Dirichletsche Integral von φ über G' wird also von der Größenordnung $\frac{\eta}{\varepsilon^3}$. Wenn daher η als ein hinreichend kleiner Bruchteil von ε gewählt wird, so ist dieses Integral beliebig klein, während das Integral von φ^2 über G' sich beliebig wenig von 1 unterscheidet. Daher ist der klassischen Minimaleigenschaft der Eigenwerte und Eigenfunktionen zufolge erst recht der zweite Eigenwert von G' beliebig klein. Läßt man also ε gegen Null konvergieren, so konvergiert der zweite Eigenwert von G' sicherlich gegen Null, wenn $\frac{\eta}{\varepsilon^3}$ gegen Null konvergiert. Der zweite Eigenwert von G ist jedoch positiv; also ist er nicht der Grenzwert des zweiten Eigenwertes von G' , obwohl der Rand von G' gegen den von G konvergiert.

stetigen ersten Ableitungen versehen sind, und wobei diese Funktionen ebenso wie ihre ersten Ableitungen absolut genommen unterhalb einer hinreichend kleinen positiven Schranke ε liegen. Wenn dies der Fall ist, so sagen wir, daß das Gebiet G durch das Gebiet G' mit der Genauigkeit ε approximiert wird.

Konvergiert ε gegen Null und ändert sich G' entsprechend, so sagen wir, daß G' stetig in G übergeht. Nunmehr gilt, wie wir zeigen wollen, der folgende Satz.

Satz 13. *Der n -te Eigenwert der Differentialgleichung $L(u) + \lambda ku = 0$ bei irgendeiner der betrachteten Randbedingungen ändert sich stetig, wenn das Gebiet G in dem gekennzeichneten Sinne stetig deformiert wird.*

Zum Beweise betrachten wir eine Folge von Gebieten G' , für welche die oben eingeführte Zahl ε gegen Null konvergiert. Wir transformieren den Ausdruck $\mathfrak{D}[\varphi]$ durch die Transformation (27) in einen Ausdruck für das Gebiet G' und erhalten dabei für $D[\varphi]$ das Integral

$$\iint_{(G')} \left\{ \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x'} \left(1 + \frac{\partial g}{\partial x} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x'} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} \left(1 + \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right)^2 \right] p + \varphi^2 q \right\} M^{-1} dx' dy'$$

wobei zur Abkürzung für die bei hinreichend kleinem ε beliebig wenig von 1 verschiedene Funktionaldeterminante

$$M = \left(1 + \frac{\partial g}{\partial x} \right) \left(1 + \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x}$$

gesetzt ist. Für das Randintegral ergibt sich

$$\int_R p \sigma \varphi^2 ds = \int_{R'} p \sigma \frac{ds}{ds'} \varphi^2 ds'.$$

Hierbei bedeutet ds' das Linienelement des Randes R' von G' . Beachtet man nun die Relation

$$2 \int_{G'} \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \frac{\partial \varphi}{\partial y'} dx' dy' \leq \int_{G'} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'} \right)^2 \right] dx' dy',$$

so folgt aus

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\partial g}{\partial y} \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\partial h}{\partial y} \right| < \varepsilon$$

$$D[\varphi] = (1 + \delta_1) \iint_{G'} \left\{ p \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'} \right)^2 \right] + q \varphi^2 \right\} dx' dy'$$

sowie

$$\int_R p \sigma \varphi^2 ds = (1 + \delta_2) \int_{R'} p \sigma \varphi^2 ds',$$

wobei δ_1, δ_2 zwei zugleich mit ε gegen Null strebende Größen sind, mithin

$$\mathfrak{D}[\varphi] = (1 + \delta_3) \mathfrak{D}'[\varphi],$$

o δ_3 mit ε zugleich gegen Null strebt und wobei $\mathfrak{D}'[\varphi]$ den $\mathfrak{D}[\varphi]$ entsprechenden Ausdruck für G' bedeutet.

Wir haben ferner die Nebenbedingungen (15), (23) des § 3 für die Funktionen φ zu transformieren und erhalten

$$\int_G \int k \varphi^2 dx dy = \int_{G'} \int k M^{-1} \varphi^2 dx' dy' = 1$$

$$\int_G \int k \varphi v_i dx dy = \int_{G'} \int k M^{-1} \varphi v_i dx' dy' = 0, \quad (i = 1, \dots, n-1).$$

Ersetzen wir also die Funktionen v_i durch $v'_i = v_i M^{-1}$ und multiplizieren die Funktion φ mit einem — bei kleinem ε von 1 beliebig wenig verschiedenen — konstanten Faktor, so daß für die neu entstehende Funktion φ' die Relationen

$$\int_{G'} \int k \varphi'^2 dx' dy' = 1,$$

$$\int_{G'} \int k \varphi' v'_i dx dy \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

erhalten, so wird erstens

$$\mathfrak{D}[\varphi] = (1 + \delta) \mathfrak{D}'[\varphi'],$$

wobei δ eine mit ε gegen Null konvergierende Zahl ist; zweitens genügt die Funktion φ als Funktion von x' , y' in G' aufgefaßt den Bedingungen des Maximum-Minimum-Problems, welches den n -ten Eigenwert von G' charakterisiert, wobei die Funktionen $v'_i = M^{-1} \cdot v_i$ die Rolle der Funktionen v_i in G spielen. Da nun der Bereich sämtlicher zulässiger Funktionensysteme v'_i zugleich mit dem der Funktionensysteme v_i durchlaufen wird, so folgt, daß auch das Maximum-Minimum der linken Seite sich von dem der rechten nur um einen — mit gegen Null konvergierenden ε — gegen Null konvergierenden Faktor unterscheiden kann. Damit aber ist Satz 13 bewiesen. Wir erkennen gleichzeitig aus der obigen Entwicklung, daß dieser Satz sich folgendermaßen präzisieren läßt:

Zusatz zu Satz 13. Wenn ein Gebiet G' in ein Gebiet G durch die Transformation (27) übergeht und dabei $\left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| < \varepsilon$, $\left| \frac{\partial g}{\partial y} \right| < \varepsilon$, $\left| \frac{\partial h}{\partial x} \right| < \varepsilon$, $\left| \frac{\partial h}{\partial y} \right| < \varepsilon$ ist, unter ε eine beliebig kleine positive Zahl verstanden, so gibt es eine nur von ε abhängige, mit ε zugleich gegen Null konvergierende Zahl η derart, daß die n -ten Eigenwerte μ_n , μ'_n der Gebiete G und G' für irgendwelche der betrachteten Randbedingungen und jedes n der Beziehung

$$\left| \frac{\mu'_n}{\mu_n} - 1 \right| < \eta$$

genügen.

Für die Randbedingung $u=0$, bei welcher keinerlei normale Ableitung auftritt, gilt naturgemäß der Stetigkeitssatz im weiteren Umfange:

Satz 14. *Der n -te Eigenwert der Differentialgleichung $L(u) + \lambda ku = 0$ für die Randbedingung $u = 0$ ist auch dann noch eine stetige Funktion des Gebietes G , wenn bei der stetigen Deformation des Gebietes die Stetigkeit der Veränderung der Normalen nicht mehr gefordert wird.*

Man kann nämlich die Ränder zweier Gebiete G und G' , welche hinreichend benachbart sind, ohne daß in benachbarten entsprechenden Randpunkten auch die Normalen benachbarte Richtungen besitzen müssen, stets zwischen die Ränder zweier im engeren Sinne hinreichend benachbarter Gebiete B und B' einschließen. Da nun der n -te Eigenwert für die Randbedingung $u = 0$ nach Satz 7. eine monotone Funktion des Gebietes ist, so liegen die n -ten Eigenwerte von G und G' zwischen denen von B und B' , welche nach Satz 13 ihrerseits benachbart sind. Damit ist Satz 14. bewiesen²⁰⁾.

§ 6.

Die Gesetze der asymptotischen Eigenwertverteilung für die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ bei Gebieten, welche aus endlich vielen Quadraten oder Würfeln bestehen.

Unsere bisher gewonnenen Resultate und Methoden gestatten uns, fast mühelos das asymptotische Verhalten des n -ten Eigenwertes zu verfolgen. Wir wollen zunächst die Differentialgleichung (1) $\Delta u + \lambda u = 0$ betrachten und voraussetzen, daß das Gebiet G aus endlich vielen, etwa h , kongruenten Quadraten, bzw. im Falle von drei unabhängigen Variablen Würfeln der Seitenlänge a besteht. Wir werden solche Gebiete als „Quadratgebiete“ bzw. „Würfelgebiete“ bezeichnen. Der Flächeninhalt bzw. das Volumen von G ist dann $f = ha^2$ bzw. $V = ha^3$.

Im folgenden werden wir mit dem Buchstaben ϑ stets eine zwischen -1 und $+1$ liegende Zahl, mit dem Buchstaben c oder C eine Konstante bezeichnen und uns die Freiheit gestatten, gelegentlich, wenn ein Mißverständnis ausgeschlossen erscheint, die Unterscheidung verschiedener solcher Werte ϑ bzw. c oder C durch Indizes usw. fortzulassen.

Wir erinnern zunächst an die bekannte Abschätzung der Eigenwerte der Differentialgleichung (1) für ein Quadrat Q der Seitenlänge a . Hier

²⁰⁾ Falls G und G' von einem gemeinsamen inneren Punkte aus konvex sind, so kann man für B und B' zwei durch Ähnlichkeitstransformation von diesem Punkte aus ineinander übergehende Gebiete wählen, deren Eigenwerte sich verhalten wie das Quadrat des Ähnlichkeitsverhältnisses zu 1, mithin bei hinreichender Nachbarschaft der beiden Gebiete selbst beliebig nahe beieinander liegen. Man kann also in diesem Falle die Anwendung des allgemeinen Satzes 13 entbehren.

werden die Eigenfunktionen und Eigenwerte bei der Randbedingung $u = 0$ durch die Ausdrücke

$$\sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{a}, \quad \frac{\pi^2}{a^2}(l^2 + m^2), \quad (l, m = 1, 2, 3, \dots),$$

bei der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ durch die Ausdrücke

$$\cos \frac{l\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{a}, \quad \frac{\pi^2}{a^2}(l^2 + m^2) \quad (l, m = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

gegeben. Bezeichnet man die Anzahl der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte im ersten Falle mit $A_Q(\lambda)$, im zweiten Falle mit $B_Q(\lambda)$, so sind diese Anzahlen identisch mit den Anzahlen der ganzzahligen Lösungen der Ungleichheit

$$l^2 + m^2 < \lambda \frac{a^2}{\pi^2},$$

wobei im ersten Falle $l > 0, m > 0$, im zweiten $l \geq 0, m \geq 0$ vorgeschrieben ist. Durch *Abzählung der Gitterpunkte im ersten* Quadranten des um den Nullpunkt des Koordinatensystems mit dem Radius $\frac{a}{\pi}\sqrt{\lambda}$ beschlagenen Kreises erhält man für hinreichend großes λ sofort

$$(28) \quad A_Q(\lambda) = \frac{a^2}{4\pi} \lambda + \vartheta c a \sqrt{\lambda}, \quad B_Q(\lambda) = \frac{a^2}{4\pi} \lambda + \vartheta' c a \sqrt{\lambda}.$$

Tierbei ist c eine numerische von λ und a unabhängige Konstante.

Es sei nun $A(\lambda)$ die Anzahl der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ für das Gebiet G und die Randbedingungen $u = 0$ oder $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$, oder auch die allgemeinere Randbedingung vom Typus (4), wobei jedoch zunächst $\sigma \geq 0$ vorausgesetzt werde. Bezeichnen wir mit $A_{Q_1}(\lambda), A_{Q_2}(\lambda), \dots, A_{Q_n}(\lambda)$ die entsprechenden Anzahlen für die Teilquadrate bei der Randbedingung $u = 0$, mit $B_{Q_1}(\lambda), B_{Q_2}(\lambda), \dots, B_{Q_n}(\lambda)$ diese Anzahlen bei der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$, so besagt Satz 9 in Verbindung mit Satz 6 und 8

$$A_{Q_1}(\lambda) + \dots + A_{Q_n}(\lambda) \leq A(\lambda) \leq B_{Q_1}(\lambda) + \dots + B_{Q_n}(\lambda).$$

Da aber diese Anzahlen $A_{Q_i}(\lambda), B_{Q_i}(\lambda)$ übereinstimmend durch die Gleichungen (28) gegeben werden, so schließen wir

$$(29) \quad A(\lambda) = \frac{f}{4\pi} \lambda + \vartheta c a \sqrt{\lambda}.$$

Mit anderen Worten, es gilt folgender Satz:

Satz 15. Die Anzahl $A(\lambda)$ der unterhalb einer Grenze gelegenen Eigenwerte der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ für ein Quadratgebiet

vom Flächeninhalt f ist bei allen oben betrachteten Randbedingungen asymptotisch gleich

$$\frac{f}{4\pi} \lambda,$$

d. h. es gilt

$$(30) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{A(\lambda)}{f\lambda} = \frac{1}{4\pi}.$$

Genauer besteht für alle hinreichend großen λ die Beziehung

$$\left| \frac{4\pi A(\lambda)}{f\lambda} - 1 \right| < \frac{C}{\sqrt{\lambda}},$$

wo C eine von λ unabhängige Konstante bedeutet.

Bezeichnet man mit ϱ_n den n -ten zu einer der betrachteten Randbedingungen gehörigen Eigenwert, so ist die Aussage dieses Satzes bzw. der Gleichung (29) äquivalent mit der Gleichung

$$(31) \quad \varrho_n = \frac{4\pi}{f} n + \vartheta c \sqrt{n}$$

wo wieder ϑ einen echten Bruch, c eine von n unabhängige Konstante bedeutet. Man braucht, um dies einzusehen, nur in (29) $A(\varrho_n) = n$ zu setzen.

Die Gültigkeit des Satzes 15 bleibt bestehen, auch wenn etwa in der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$ die Funktion σ negative Werte annehmen kann. Wir schließen dies wiederum mit Hilfe des Hilfssatzes aus § 2.

Vorab bemerken wir, daß nach Satz 9 der n -te Eigenwert μ_n bei der betrachteten Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$ jedenfalls nicht größer als der n -te Eigenwert λ_n bei der Randbedingung $u = 0$ sein kann. Wir dürfen also von vornherein voraussetzen, daß der Ausdruck

$$\mathfrak{D}[\varphi] = D[\varphi] + \int_R p \sigma \varphi^2 ds,$$

dessen Maximum-Minimum ja μ_n ist, die Grenze λ_n für keine der zur Konkurrenz in dem Variationsproblem zugelassenen Funktionen φ übersteigt; die Lösung des Maximum-Minimum-Problems wird dadurch nicht geändert.

Nun ist nach dem Hilfssatz

$$\left| \int_R p \sigma \varphi^2 ds \right| < c_1 \sqrt{D[\varphi]} + c_2,$$

wobei c_1, c_2 numerische Konstante bedeuten; es wird also

$$D[\varphi] - c_1 \sqrt{D[\varphi]} - c_2 < \mathfrak{D}[\varphi] < D[\varphi] + c_1 \sqrt{D[\varphi]} + c_2.$$

Aus der Annahme $\mathfrak{D}[\varphi] \leq \lambda_n$ folgt

$$D[\varphi] - c_1 \sqrt{D[\varphi]} - c_2 < \lambda_n,$$

und hieraus wiederum ergibt sich, daß $D[\varphi]$ mit n nicht stärker wachsen kann als λ_n , d. h. daß eine Relation der Form

$$D[\varphi] < c_3 \lambda_n$$

gelten muß, unter c_3 wiederum eine feste Konstante verstanden. Mithin wird, da ja die Beziehung (31) für $\varrho_n = \lambda_n$ gilt, unter den über φ gemachten Voraussetzungen

$$D[\varphi] - c_4 \sqrt{n} < \mathfrak{D}[\varphi] < D[\varphi] + c_4 \sqrt{n},$$

und diese Beziehung gilt somit für die unteren Grenzen der Ausdrücke $\mathfrak{D}[\varphi]$ und $D[\varphi]$ bei gegebenen Funktionen $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$, mithin auch für die Maxima dieser unteren Grenzen. Dieses Maximum ist für $D[\varphi]$ der n -te zur Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ gehörige Eigenwert, für den die Beziehung (31) schon bewiesen ist. Daher folgt sie nun unmittelbar auch für das Maximum der unteren Grenze von $\mathfrak{D}[\varphi]$, den betrachteten n -ten Eigenwert μ_n bei der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$, und diese Beziehung ist mit der Aussage von Satz 15 gleichbedeutend.

Wenn statt zweier unabhängiger Variablen drei vorliegen, so ändern sich in der ganzen Betrachtung nur die Ausdrücke $A_Q(\lambda)$, $B_Q(\lambda)$ für die Anzahlen der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte bei den Randbedingungen $u = 0$ bzw. $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$, und zwar wird

$$A_Q(\lambda) = \frac{1}{6\pi^2} a^3 \lambda^{\frac{3}{2}} + \vartheta c a^2 \lambda, \quad B_Q(\lambda) = \frac{1}{6\pi^2} a^3 \lambda^{\frac{3}{2}} + \vartheta c a^2 \lambda.$$

Somit erhalten wir jetzt das Resultat:

Satz 16. Die Anzahl $A(\lambda)$ der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ für ein aus endlich vielen kongruenten Würfeln bestehendes Polyeder vom Rauminhalt V ist bei allen betrachteten Randbedingungen asymptotisch gleich $\frac{V}{6\pi^2} \lambda^{\frac{3}{2}}$, d. h. es gilt

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{A(\lambda)}{V \lambda^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{6\pi^2}.$$

Genauer besteht bei hinreichend großem λ die Formel

$$\left| \frac{6\pi^2 A(\lambda)}{V \lambda^{\frac{3}{2}}} - 1 \right| < C \frac{1}{\sqrt{\lambda}},$$

wobei C eine von λ unabhängige Konstante ist²¹⁾.

²¹⁾ Eine schärfere allgemeine Abschätzung des bei der asymptotischen Abschätzung von $A(\lambda)$ gemachten Fehlers ist allgemein nicht möglich, da beim Quadrat, bzw. beim Würfel die angegebene Größenordnung des Fehlers wirklich erreicht wird.

§ 7.

Ausdehnung des Resultates auf die allgemeine Differentialgleichung

$$L(u) + \lambda ku = 0.$$

Um die gewonnenen Sätze über die asymptotische Eigenwertverteilung auf die allgemeine elliptische, sich selbst adjungierte Differentialgleichung (5) zu übertragen, denken wir uns die Quadrateinteilung bzw. Würfeleinteilung des Gebietes G durch mehrfach fortgesetzte Halbierung der Seitenlänge a so verfeinert, daß in jedem der entstehenden Elementargebiete die Differenz zwischen dem größten und kleinsten Wert der Funktionen p bzw. k unterhalb einer vorgegebenen hinreichend kleinen positiven Zahl ε bleibt. Wir beachten ferner, daß die Funktion q auf die asymptotische Eigenwertverteilung überhaupt keinen Einfluß ausüben kann, da der Ausdruck $\mathfrak{D}[\varphi]$ und mit ihm sein Maximum-Minimum sich bei Streichung der Funktion q nur um einen beschränkten Betrag ändert, nämlich um weniger als $\frac{|q|_{\max}}{k_{\min}}$, wie oben (z. B. S. 8) unmittelbar aus der Relation (15) gefolgert wurde; $|q|_{\max}$ und $k_{\min}$ bedeuten dabei die entsprechenden Extremwerte der Funktionen im Gebiete G . Wir nehmen demgemäß in den folgenden Entwicklungen $q = 0$ an.

Die weitere Betrachtung werde für den Fall eines ebenen Gebietes G durchgeführt. Die Anzahl der Quadrate, aus denen G besteht, sei wiederum h , ihre Seitenlänge a , mit $A'(\lambda)$ werde die Anzahl der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte der Differentialgleichung $L(u) + \lambda ku = 0$ bezeichnet, wobei als Randbedingung irgendeine der betrachteten genommen werden kann, die Bedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$ jedoch zunächst unter der beschränkenden Voraussetzung $\sigma \geq 0$. Die Teilquadrate bezeichnen wir mit $Q_1, Q_2, \dots, Q_h$, die zugehörigen Anzahlen der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte der Differentialgleichung für die Randbedingung $u = 0$ mit $A'_{Q_1}(\lambda), \dots, A'_{Q_h}(\lambda)$, für die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ mit $B'_{Q_1}(\lambda), \dots, B'_{Q_h}(\lambda)$. Nach Satz 6, 8 und 9 ist wieder

$$A'_{Q_1}(\lambda) + \dots + A'_{Q_h}(\lambda) \leq A'(\lambda) \leq B'_{Q_1}(\lambda) + \dots + B'_{Q_h}(\lambda).$$

Nun folgt aus Satz 11

$$A'_{Q_i}(\lambda) \geq \frac{k_m^{(i)}}{p_M^{(i)}} A_{Q_i}(\lambda), \quad B'_{Q_i}(\lambda) \leq \frac{k_M^{(i)}}{p_m^{(i)}} B_{Q_i}(\lambda),$$

wenn mit $p_M^{(i)}, k_M^{(i)}$, die Maxima, mit $p_m^{(i)}, k_m^{(i)}$ die Minima der betreffenden Funktionen in dem Quadrate Q_i bezeichnet werden und $A_{Q_i}(\lambda), B_{Q_i}(\lambda)$ wie im vorigen Paragraphen die durch die Gleichungen (28) gegebenen Anzahlen der entsprechenden Eigenwerte für die Differentialgleichung

$u + \lambda u = 0$ bedeuten. Denn ersetzt man in der Differentialgleichung (5) durch $p_M^{(i)}$, k durch $k_m^{(i)}$, so wird nach Satz 11 jeder der Eigenwerte vergrößert, oder jedenfalls nicht verkleinert, ihre Anzahl unterhalb einer Grenze λ also verkleinert oder nicht vergrößert. Andererseits geht dabei die Differentialgleichung (5) in die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda \frac{k_m^{(i)}}{p_M^{(i)}} u = 0$ über, deren Eigenwerte die mit $\frac{p_M^{(i)}}{p_m^{(i)}}$ multiplizierten Eigenwerte der Differentialgleichung (1) sind. Das Entsprechende gilt, wenn p durch $p_m^{(i)}$, k durch $k_M^{(i)}$ ersetzt wird.

Ferner ist, da k und p stetige Funktionen sind,

$$\iint_G \frac{k}{p} dx dy = \alpha^2 \sum_{i=1}^h \frac{k_m^{(i)}}{p_M^{(i)}} + \delta = \alpha^2 \sum_{i=1}^h \frac{k_M^{(i)}}{p_m^{(i)}} + \delta',$$

wobei die Zahlen $|\delta|, |\delta'|$ beliebig klein werden, wenn nur die anfängliche Quadrateinteilung hinreichend fein d. h. α hinreichend klein gewählt ist. Somit ergibt sich durch Anwendung von (28) ganz ebenso wie in § 6

$$A(\lambda) = \frac{\lambda}{4\pi} \iint_G \frac{k}{p} dx dy + \lambda \delta'' + \vartheta c \sqrt{\lambda},$$

wo auch $|\delta''|$ beliebig ist, und dies ist nichts anderes als folgende Aussage über die asymptotische Eigenwertverteilung:

Satz 17. Die Anzahl $A(\lambda)$ der zur Differentialgleichung $L(u) + \lambda ku = 0$ gehörigen, unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte eines Quadratgebietes G ist für jede der betrachteten Randbedingungen asymptotisch

gleich $\frac{\lambda}{4\pi} \iint_G \frac{k}{p} dx dy$, d. h. es gilt

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{A(\lambda)}{\lambda \iint_G \frac{k}{p} dx dy} = \frac{1}{4\pi}.$$

Die ursprüngliche Voraussetzung $\sigma \geq 0$ erkennt man hier genau so wie in § 6 als überflüssig.

Dieselben Überlegungen für den Raum durchgeführt ergeben folgendes Resultat:

Satz 18. Die Anzahl der zur Differentialgleichung $L(u) + \lambda ku = 0$ gehörigen, unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte eines Würfelgebietes G ist für alle hier betrachteten Randbedingungen asymptotisch

$$\lambda^{\frac{3}{2}} \frac{1}{6\pi^2} \iiint_G \left(\frac{k}{p}\right)^{\frac{3}{2}} dx dy dz,$$

d. h. es gilt die Relation

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{A(\lambda)}{\lambda^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{6\pi^3} \iiint_Q \left(\frac{k}{p}\right)^{\frac{3}{2}} dx dy dz.$$

Zum Schluß sei noch darauf hingewiesen, daß die Überlegungen der beiden letzten Paragraphen sich genau ebenso für einen *allgemeineren Bereich* durchführen lassen, der aus *endlich vielen beliebigen Rechtecken bzw. Quadern* zusammengesetzt ist.

§ 8.

Die Gesetze der asymptotischen Eigenwertverteilung für einen beliebigen Bereich.

Um die asymptotischen Spektralgesetze der vorangehenden Paragraphen für beliebige Bereiche zu begründen, müssen wir diese Bereiche durch Quadrate bzw. Kuben von innen heraus ausschöpfen. Dabei werden wir neue Überlegungen lediglich anzustellen haben, um den Einfluß des bei jeder Approximation übrigbleibenden Randstreifens abzuschätzen.

Zunächst setzen wir voraus, daß G ein ebener Bereich sei, dessen Rand überall stetig gekrümmt ist, und betrachten ferner nur die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$.

Wir schicken eine Reihe von Vorbemerkungen voraus, welche sich auf die zu dieser Differentialgleichung und zur Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ gehörigen Eigenwerte, bzw. die Anzahl derselben unterhalb einer gegebenen Grenze für gewisse einfache Gebiete beziehen.

Sei zunächst G ein rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck mit der Kathete a . Jede Eigenfunktion des Dreiecks ist auch Eigenfunktion des durch Spiegelung an der Hypothenuse entstehenden Quadrates für dieselbe Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$. Denn man erkennt ohne weiteres, daß sich die Eigenfunktion in das gespiegelte Dreieck fortsetzen läßt, indem man spiegelbildlich zur Hypothenuse gelegenen Punkten denselben Funktionswert zuweist; dabei wird die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ auf dem ganzen Rande des Quadrates erfüllt. Der n -te Eigenwert des Dreiecks ist also zugleich Eigenwert des Quadrates, mithin ist der n -te Eigenwert des Quadrates sicher nicht größer als der des Dreiecks, oder die Anzahl der unterhalb einer Grenze gelegenen Eigenwerte für das Dreieck bei der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ ist höchstens gleich der entsprechenden Anzahl für das Quadrat, d. h. der durch Formel (28) angegebenen Zahl.

Sei zweitens G ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b , wobei $b < a$ vorausgesetzt werde. Die Kathete a falle

die x -Achse, die Kathete b in die y -Achse. Wir transformieren durch die Transformation $\xi = x$, $\eta = \frac{a}{b} y$ das Dreieck G in ein rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck G' mit der Kathete a . Hierbei transformiert sich der Ausdruck $D[\varphi]$ in

$$D[\varphi] = \iint_{G'} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{a^2}{b^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 \right] \frac{b}{a} d\xi d\eta$$

und die Nebenbedingung (15) in

$$\iint_{G'} \varphi^2 \frac{b}{a} d\xi d\eta = 1,$$

während die andern Nebenbedingungen (23) aus § 3 bei der Transformation ihre Gestalt überhaupt nicht ändern. Wir können also unter Weglassung des unwesentlichen in beiden Integralen auftretenden konstanten Faktors den n -ten Eigenwert κ_n des Dreiecks G als das Maximum-Minimum des über G' erstreckten Integrales

$$\iint_{G'} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\xi d\eta$$

charakterisieren, wobei im übrigen das Maximum-Minimum ganz im ursprünglichen Sinne zu verstehen ist. Da nun sicherlich wegen $\frac{a}{b} \geq 1$

$$\iint_{G'} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{a^2}{b^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\xi d\eta \geq \iint_{G'} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\xi d\eta$$

folgt, so ist auch das Maximum-Minimum der linken Seite größer oder gleich dem der rechten Seite, d. h. dem n -ten Eigenwert für das rechtwinklige gleichschenklige Dreieck G' , also erst recht größer als der n -te Eigenwert eines Quadrates der Seite a . *Mithin ist bei der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ die Anzahl der unterhalb einer Grenze gelegenen Eigenwerte eines rechtwinkligen Dreiecks mit Katheten kleiner als a sicher nicht größer als die entsprechende Anzahl der Eigenwerte für das Quadrat der Seite a und also erst recht für jedes größere Quadrat.*

Ebenso ist die Anzahl der Eigenwerte für ein beliebiges Rechteck unterhalb einer Grenze sicher nicht größer als die entsprechende Anzahl für ein Quadrat, dessen Seite mindestens gleich der größeren Rechtecksseite ist.

Aus diesen Tatsachen in Verbindung mit Satz 8 erhält man ohne weiteres die Möglichkeit, die Anzahl der Eigenwerte unterhalb einer gegebenen Grenze nach oben abzuschätzen, wenn das betrachtete Gebiet

aus einer endlichen Anzahl von Rechtecken und rechtwinkligen Dreiecken zusammengesetzt ist.

Diese Bemerkungen wenden wir an, um den *Einfluß des Randstreifens*, der bei einer Ausschöpfung von G durch Quadrate übrigbleibt, auf die Eigenwertverteilung zu beurteilen. Hierzu muß zuerst dieser Randstreifen definiert werden. Wir nehmen an, es sei, nötigenfalls durch mehrmalige Halbierung der Seitenlänge, die Quadrateinteilung der Ebene so fein geworden, daß bei jedem in einem der Quadrate liegenden Randstücke von G die Normale sich um weniger als einen vorgegebenen kleinen Winkel η dreht, über dessen Kleinheit wir uns die Verfügung vorbehalten. Wir können dann, wie in der Figur 2, den Rand R durch eine Anzahl r aneinander anschließender Elementargebiete $E_1, E_2, \dots, E_r$ folgender Art begleiten: Jedes Gebiet E ist entweder begrenzt von zwei zueinander senkrechten Geraden AB, AC der Quadrateinteilung, deren Länge zwischen a und $3a$ liegt, und einem Stück BC des Randes (Fig. 3), oder es ist begrenzt von einer Seite AB der Quadrateinteilung, zwei dazu senkrechten Strecken AC, BD mit Längen zwischen a und $3a$ und einem Stück CD des Randes (Fig. 4). Aus r solchen Gebieten setzen wir einen Randstreifen S zusammen, so daß nach Abtrennung desselben von G ein Quadratpolygon, bestehend aus h Quadraten $Q_1, Q_2, \dots, Q_h$ übrig bleibt. Die Anzahl r ist offenbar kleiner als eine von a unabhängige, wesentlich von der Länge des Randes abhängende Konstante C dividiert durch a .

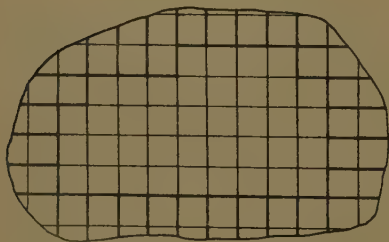


Fig. 2.

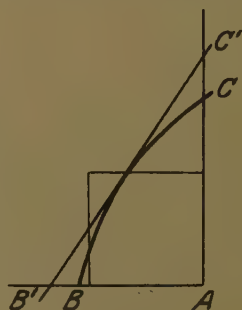


Fig. 3.

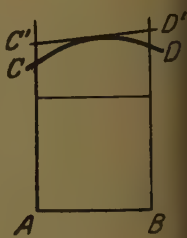


Fig. 4.

Um die Anzahl $B_E(\lambda)$ der unterhalb einer Grenze λ gelegenen zur Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ und der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ gehörigen Eigenwerte eines der Gebiete E nach oben abzuschätzen, haben wir wieder für den n -ten Eigenwert eine untere Grenze aufzusuchen. Zu diesem Zwecke ziehen wir durch einen beliebigen Punkt des krummlinigen Randstückes von E die Tangente. Diese begrenzt zusammen mit den geradlinigen Randstücken von E ein Gebiet vom Typus $AB'C'$ (Fig. 3),

h. bei hinreichend kleinem η ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten kleiner als $4a$ oder ein Trapez vom Typus $ABC'D'$, bei dem ebenfalls die Seiten AC', BD' kleiner als $4a$ sind (Fig. 4), je nachdem, welchem Gebiet das Gebiet E angehört. Die Gebiete $AB'C'$ bzw. $ABC'D'$ wollen wir mit E' bezeichnen. Nun kann man das Gebiet E stets in das Gebiet E' durch eine Transformation von der Form (27) überführen, wie sie in § 4 betrachtet wurde. Bei Gebieten des ersten Typus sei etwa A der Pol eines Polarkoordinatensystems mit den Koordinaten ϑ, ϱ , und sei $\varrho = f(\vartheta)$ die Gleichung der krummen Linie BC , $\varrho = g(\vartheta)$ die Gleichung der Geraden $B'C'$. Dann wird durch die Gleichungen

$$\vartheta' = \vartheta, \quad \varrho' = \varrho \frac{g(\vartheta)}{f(\vartheta)}$$

die Transformation des krummlinigen Dreiecks E auf das geradlinige E' vermittelt. Im Falle des zweiten Typus $ABCD$ liege AB in der x -Achse, $y = g(x)$ sei die Gleichung der Geraden $C'D'$ und $y = f(x)$ die Gleichung der krummen Linie CD . Dann betrachten wir die Transformation

$$x' = x, \quad y' = y \frac{g(x)}{f(x)}.$$

Wenn wir voraussetzen, daß die zugrunde gelegte Strecke a hinreichend klein, also auch die totale Drehung der Tangente an dem Kurvenbogen CB bzw. CD hinreichend klein genommen wird, so haben offenbar die hier betrachteten Transformationen genau die Gestalt (27), und die dort mit ε bezeichnete Größe wird beliebig klein. Nach Zusatz zu Satz 13 unterscheiden sich dann aber die entsprechenden n -ten Eigenwerte für die Gebiete E und E' nur um einen für alle n gleichmäßig wenig von 1 verschiedenen Faktor. Mithin gilt dasselbe auch für die entsprechenden Anzahlen $B_E(\lambda)$ und $B_{E'}(\lambda)$ der unterhalb einer Grenze λ gelegenen zur Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ gehörigen Eigenwerte.

Da nun das Gebiet E' entweder ein rechtwinkliges Dreieck mit Seiten kleiner als $4a$ ist, oder sich aus einem solchen Dreieck und einem Rechteck mit Seiten kleiner als $3a$ zusammensetzt, so folgt, sobald nur a hinreichend klein genommen ist, jedenfalls für die Anzahl $B_{E'}(\lambda)$ von einem gewissen λ ab

$$B_{E'}(\lambda) < c_3 a^3 \lambda + c_4 a \sqrt{\lambda},$$

3) c_1, c_2 geeignet zu wählende numerische Konstanten bedeuten.

Nunmehr sind wir in der Lage, für das Gebiet G die asymptotischen Eigenwertgesetze zu beweisen. Es sei also $A(\lambda)$ wieder die Anzahl der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte unserer Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ für das Gebiet G und irgendeine der betrachteten Rand-

bedingungen, wobei wir wieder zuerst gegebenenfalls die Voraussetzung $\sigma \geq 0$ machen. Eine Quadrateinteilung der Ebene durch Quadrate mit der Seitenlänge a führe zu einer Zerlegung des Gebietes G in h Quadrate $Q_1, Q_2, \dots, Q_h$ und r Randgebiete $E_1, E_2, \dots, E_r$. Wie früher bezeichnen wir die Anzahlen der zu den Quadraten gehörigen unterhalb λ liegenden Eigenwerte mit $A_i(\lambda)$ bzw. $B_i(\lambda)$, je nachdem die Randbedingung $u = 0$ oder $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ gestellt ist. Mit $A_{E_i}(\lambda)$ bzw. $B_{E_i}(\lambda)$ werden die entsprechenden Zahlen für die Gebiete E_i bezeichnet; (von den letzteren brauchen wir jedoch nur die Zahlen $B_{E_i}(\lambda)$).

Gemäß den Gleichungen (28) ist

$$A_i(\lambda) = \frac{a^2}{4\pi} \lambda + a \vartheta_1 c_1 \sqrt{\lambda}, \quad B_i(\lambda) = \frac{a^2}{4\pi} \lambda + a \vartheta_2 c_2 \sqrt{\lambda},$$

und nach dem Vorangehenden gilt

$$B_{E_i}(\lambda) = \vartheta_3 (c_3 \lambda a^2 + a c_4 \sqrt{\lambda}),$$

wobei, wie stets, mit $\vartheta, \vartheta_1, \dots$ echte Brüche, mit $c_1, c_2, \dots$ irgendwelche von a und λ unabhängige Konstanten bezeichnet werden.

Nach Satz 6 und Satz 8, 9 ist

$$A_1(\lambda) + A_2(\lambda) + \dots + A_h(\lambda) \leq A(\lambda) \leq B_1(\lambda) + \dots + B_h(\lambda) + B_{E_1}(\lambda) + \dots + B_{E_r}(\lambda),$$

ferner ist jedenfalls

$$\begin{aligned} A_1(\lambda) + \dots + A_h(\lambda) &= \frac{ha^2}{4\pi} \lambda + \vartheta_1 c_1 h a \sqrt{\lambda} = \lambda \left(\frac{ha^2}{4\pi} + \frac{\vartheta_1 c_1 h a}{\sqrt{\lambda}} \right), \\ B_1(\lambda) + \dots + B_h(\lambda) + B_{E_1}(\lambda) + \dots + B_{E_r}(\lambda) &= \frac{ha^2}{4\pi} \lambda + \vartheta_2 c_2 h a \sqrt{\lambda} + \vartheta_3 r a^2 \lambda c_3 + \vartheta_3 r a c_4 \sqrt{\lambda} \\ &= \lambda \left[\left(\frac{ha^2}{4\pi} + \vartheta_3 c_3 r a^2 \right) + (h a \vartheta_2 c_2 + r a \vartheta_3 c_4) \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right]. \end{aligned}$$

Da nun $ar < c_3$, also $a^2 r$ bei hinreichend kleinem a beliebig klein ist, da ferner bei hinreichend kleinem a für jedes noch so kleine δ gilt

$$|h a^2 - f| < \delta,$$

so folgt aus diesen Ungleichungen unmittelbar das asymptotische Gesetz

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{4\pi A(\lambda)}{\lambda f} = 1.$$

Denn wir haben die Größe a frei zur Verfügung und können, etwa indem wir ein festes hinreichend kleines a wählen, die Faktoren von λ in den obigen Ungleichungen für hinreichend große λ beliebig nahe an den Wert $\frac{f}{4\pi}$ bringen.

Auch wenn wir die Voraussetzung $\sigma \geq 0$ fallen lassen, erhalten wir mehr dasselbe asymptotische Gesetz durch die schon mehrfach ausgeführte Anwendung des Hilfssatzes in § 2 mittels derselben Schlüsse, wie an analoger Stelle in § 6 ausgeführt wurden. Zusammengefaßt ergibt also das Resultat:

Satz 19. Bei allen betrachteten Randbedingungen ist die Anzahl $A(\lambda)$ unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ für das Gebiet G asymptotisch gleich $\frac{\lambda f}{4\pi}$, d. h. es

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{4\pi A(\lambda)}{\lambda f} = 1,$$

bei f den Flächeninhalt des Gebietes bedeutet.

Beim Beweise hatten wir zunächst angenommen, daß der Rand R von G keine Ecken besitzt. Die Überlegungen sowie das Resultat bleiben doch vollständig unverändert, wenn Ecken in endlicher Anzahl zugefügt werden. Man zerlege dann das Gebiet durch gerade Linien, welche durch die Ecken gehen, ohne dort die Äste der Randkurve zu berühren, und wende auf die Teilgebiete die Überlegungen dieses Paragraphen unverändert an.

Ebenso bleiben die vorangehenden Überlegungen gültig, wenn statt der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ die allgemeinere Differentialgleichung $L(u) + \lambda ku = 0$ zugrunde gelegt wird. Es ergibt sich genau in derselben Weise wie in § 7 als Resultat

Satz 20. Die Anzahl $A(\lambda)$ der zur Differentialgleichung $L(u) + \lambda ku = 0$ gehörigen, unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte des Gebietes G für jede der betrachteten Randbedingungen asymptotisch gleich

$$\iint_G \frac{k}{p} dx dy, \text{ d. h. es gilt}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{4\pi A(\lambda)}{\lambda \iint_G \frac{k}{p} dx dy} = 1.$$

Die entsprechenden Überlegungen, wie sie hier für die Ebene durchgeführt sind, ergeben für das Eigenwertproblem im Raume die folgenden Resultate:

Satz 21. Die Anzahl $A(\lambda)$ der zur Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ gehörigen, unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte eines räumlichen Gebietes G mit dem Volumen V ist für alle betrachteten Randbedingungen asymptotisch gleich $\frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{6\pi^2} V$, d. h. es gilt

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{6\pi^2 A(\lambda)}{\lambda^{\frac{3}{2}} V} = 1.$$

Satz 22. Die entsprechende Anzahl für die allgemeinere Differentialgleichung $L(u) + \lambda ku = 0$ ist asymptotisch gleich $\frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{6\pi^2} \iiint_G \left(\frac{k}{p}\right)^{\frac{3}{2}} dx dy dz$ d. h. es gilt

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{6\pi^2 A(\lambda)}{\lambda^{\frac{3}{2}} \iiint_G \left(\frac{k}{p}\right)^{\frac{3}{2}} dx dy dz} = 1.$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß G von endlich vielen Flächenstücken mit stetiger Krümmung begrenzt ist, welche sich gegenseitig nicht berühren, wohl aber Kanten bilden dürfen.

§ 9.

Die Gesetze der asymptotischen Eigenwertverteilung für die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ in verschärfter Form.

Unsere Theorie gibt uns die Möglichkeit, die in den obigen Sätzen ausgesprochenen asymptotischen Eigenwertgesetze noch weiter zu präzisieren, d. h. eine Abschätzung für den Fehler zu finden, den wir machen, wenn wir den Ausdruck $A(\lambda)$ durch den gefundenen asymptotischen Wert ersetzen. Wir wollen die Untersuchung für die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ durchführen.

Zu diesem Zwecke brauchen wir nur die bei der Exhaustion des Gebietes G durch Elementarquadrate bzw. Würfel gegebenen Möglichkeiten besser auszunutzen, indem wir diese Gebiete nicht zahlreicher und kleiner als nötig annehmen. Sei zunächst G ein ebenes Gebiet. Wir bauen es folgendermaßen auf²³⁾: Zuerst wird eine Quadrateinteilung der Ebene etwa mit der Seitenlänge 1 zugrunde gelegt. Es mögen hiervon die h_0 Quadrate $Q_1^0, Q_2^0, \dots, Q_{h_0}^0$ ganz ins Innere von G fallen. Sodann werden sämtliche Quadrate in vier kongruente Quadrate von der Seitenlänge $\frac{1}{2}$ zerlegt. Von diesen Quadraten mögen h_1 Quadrate $Q_1^1, Q_2^1, \dots, Q_{h_1}^1$ ins Innere von G , aber nicht ins Innere eines der Quadrate Q_i^0 fallen. Nunmehr wird die Quadrateinteilung wiederum durch Halbierung der Seitenlänge verfeinert, und man gelangt zu h_2 neuen Quadraten $Q_1^2, Q_2^2, \dots, Q_{h_2}^2$ mit der Seitenlänge $\frac{1}{2^2}$, welche im Innern von G liegen, aber keinem der früheren Quadrate Q_i^0 oder Q_i^1 angehören, usw. Nach t Schritten gelangt man zu h_t Quadraten $Q_1^t, Q_2^t, \dots, Q_{h_t}^t$ der Seitenlänge $\frac{1}{2^t}$. Gemäß den Vorschriften des vorigen Paragraphen richten wir es so ein, daß der Exhaustionsrest aus r Elementar-

²³⁾ Vgl. zu den folgenden Ausführungen H. Weyl C 3, S. 196–200.

gebieten $E_1, E_2, \dots, E_r$ der dort definierten Art besteht, wobei die dort mit a bezeichnete Zahl gleich $\frac{1}{2^t}$ zu setzen ist.

Für die Zahlen h_i und r gelten bei unseren Voraussetzungen über den Rand die Beziehungen

$$h_i < 2^i \cdot c, \quad r < 2^t \cdot c,$$

wobei c eine von i und t unabhängige wesentlich durch die Länge des Randes bedingte Konstante ist²³⁾.

Wir bezeichnen wieder die Anzahlen der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte für die Gebiete Q_m^i, E_m mit $A_m^i(\lambda), A_{E_m}(\lambda)$, wenn die Randbedingung $u = 0$, mit $B_m^i(\lambda), B_{E_m}(\lambda)$, wenn die Randbedingung $u = 0$ zugrunde gelegt ist. Jedenfalls gilt nach Satz 6, 8, 9, wenn gegebenenfalls die Funktion σ in der Randbedingung nicht negativ ist,

$$A(\lambda) \leq (B_1^0 + B_2^0 + \dots + B_{h_0}^0) + \dots + (B_1^t + B_2^t + \dots + B_{h_t}^t) + (B_{E_1} + B_{E_2} + \dots + B_{E_r}),$$

$$A(\lambda) \geq (A_1^0 + A_2^0 + \dots + A_{h_0}^0) + \dots + (A_1^t + A_2^t + \dots + A_{h_t}^t).$$

Man ist die rechte Seite der ersten dieser Ungleichungen zufolge der Gleichungen (28) und der Gleichung (33) des vorigen Paragraphen gleich

$$+ \frac{h_1}{2^2} + \frac{h_2}{2^4} + \dots + \frac{h_t}{2^{2t}} + \frac{r \partial c}{2^{2t}} \lambda + \vartheta_1 c_1 \left(h_0 + \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2^2} + \dots + \frac{h_t}{2^t} + \frac{r}{2^t} \right) \sqrt{\lambda},$$

es folgt, da

$$h_0 + \frac{h_1}{2} + \dots + \frac{h_t}{2^{2t}} = f - \vartheta_2 c_2 \frac{r}{2^{2t}},$$

mit Rücksicht auf (34), daß diese rechte Seite die Gestalt hat

$$\frac{1}{4\pi} \left(f + \frac{c \vartheta_3 c_3}{2^t} \right) \lambda + \vartheta_4 c_4 (t+2) \sqrt{\lambda}.$$

Es ergibt sich für diesen Ausdruck schließlich die bei hinreichend großem λ gültige Ungleichung

$$(B_1^0 + \dots + B_{h_0}^0) + \dots + (B_{E_1} + \dots + B_{E_r}) \leq \frac{f}{4\pi} \lambda + C \left(\frac{\lambda}{2^t} + t \sqrt{\lambda} \right),$$

welcher, wie immer, mit dem Buchstaben C eine von λ und t unabhängige Konstante gemeint ist.

Wählen wir nun die Zahl t , welche ganz in unserem Belieben steht, so daß die beiden Summanden in der Klammer annähernd gleich werden,

²³⁾ Diese Ungleichheiten drücken aus, daß der Gesamtumfang der Quadrate Q^i w. Q^t die Größenordnung des Umfanges von G nicht übersteigt.

nämlich t etwa gleich der größten ganzen in $\frac{1}{2} \frac{\log \lambda}{\log 2}$ enthaltenen Zahl, s folgt aus (35) und (37)

$$(38) \quad A(\lambda) \leq \frac{f}{4\pi} \lambda + \text{Const } \sqrt{\lambda} \cdot \log \lambda.$$

Genau dieselbe Gestalt ergibt sich für die untere Schranke des Ausdruckes $A(\lambda)$.

Diese Überlegungen gelten zunächst nur, wenn gegebenenfalls die in der Randbedingung auftretende Funktion σ nirgends negativ wird, was nur dann die Ungleichung (36) gesichert ist. Doch zeigt genau dieselbe Überlegung wie in § 6 auf Grund des Hilfssatzes aus § 2, daß auch bei Verzicht auf die einschränkende Bedingung die Grenzen in der obigen Form bestehen bleiben. Wir erhalten also allgemein das schärfere asymptotische Gesetz.

Satz 23. *Für alle betrachteten Randbedingungen strebt die Differenz*

$$A(\lambda) - \frac{f}{4\pi} \lambda$$

mit wachsendem λ sicher nicht stärker gegen ∞ als der Ausdruck

$$\sqrt{\lambda} \log \lambda.$$

Dieselben Überlegungen, für den Raum durchgeführt, ergeben

Satz 24. *Für alle betrachteten Randbedingungen strebt bei dem Problem für ein räumliches Gebiet vom Volumen V die Differenz*

$$A(\lambda) - \frac{V}{6\pi^2} \lambda^{\frac{2}{3}}$$

mit wachsendem λ nicht stärker gegen ∞ als der Ausdruck

$$\lambda \log \lambda.$$

§ 10.

Vektorielle Randwertaufgaben. Das Gesetz der asymptotischen Eigenwertverteilung für die elektrischen Eigenschwingungen eines Hohlraumes.

Die in dieser Abhandlung entwickelten Methoden lassen sich unverändert auch auf solche Randwertaufgaben anwenden, bei denen nicht eine einzelne Funktion, sondern ein System von Funktionen, etwa ein Vektor bestimmt wird. Die wichtigste dieser Aufgaben, welche ursprünglich mit dem Anstoß zu den Untersuchungen über asymptotische Eigenwertverteilung gegeben hat, ist die *Randwertaufgabe der Hohlraumstrahlung*, d. h. für uns die Frage nach der Verteilung der elektrischen Eigenschwingungen

des Hohlraumes. Wir wollen unsere Methode an diesem Fall durchführen und werden dabei erkennen, daß wir das Problem nur sinngemäß unseren Gedankenkreis einzuordnen brauchen, um ohne Mühe das asymptotische Eigenwertgesetz zu erhalten.

Zunächst haben wir das Problem geeignet zu formulieren.

Es sei G ein „Hohlraum“, d. h. ein von einer oder mehreren geschlossenen Flächen begrenzter Körper vom Volumen V . Die Begrenzungsflächen mögen aus endlich vielen durchweg stetig gekrümmten Stücken bestehen, welche Kanten miteinander bilden dürfen, ohne sich jedoch dort berühren. Es gelten im übrigen dieselben Bezeichnungen wie bisher. Dann werden die elektrischen Eigenschwingungen des Hohlraumes durch ein Eigenwertproblem charakterisiert: Es ist ein Vektor e gesucht, der in G mit seinen ersten und zweiten Ableitungen stetig ist, in G der Differentialgleichung

$$9) \quad \Delta e + \lambda e = 0$$

für einen geeigneten Parameterwert λ genügt, der ferner in G die Bedingungen

$$10) \quad \operatorname{div} e = 0$$

$$11) \quad \iiint_G e^2 dx dy dz = 1$$

erfüllt, und der endlich am Rande normal steht.

Die Lösungen dieses Problems, welches wir einfach als „Strahlungsproblem“ oder Problem I bezeichnen wollen, heißen die *Eigenvektoren*. Die zugehörigen Eigenwerte sind im wesentlichen die Quadrate der Eigenschwingungszahlen.

Man vereinfacht sich bekanntlich²⁴⁾ dieses Problem, indem man zunächst die Bedingung (40) für das Innere fallen läßt und lediglich für den Rand R von G beibehält. Hierdurch entsteht ein neues Eigenwertproblem, welches wir als Problem II bezeichnen wollen. Ist v eine Lösung des Problems II, so folgt unmittelbar für die Größe $q = \operatorname{div} v$

$$\Delta q + \lambda q = 0,$$

d. h. entweder ist q identisch Null, oder q ist eine Lösung des früher behandelten „skalaren“ Eigenwertproblems: $\Delta q + \lambda q = 0$ im Innern, $q = 0$ am Rande. Im ersten Falle genügt $\operatorname{div} v$ also überall in G der Bedingung (40), d. h. v ist eine Lösung des Strahlungsproblems. Im zweiten Falle trifft dies nicht zu.

²⁴⁾ Vgl. H. Weyl, A, S. 470f.

Hat man umgekehrt eine Lösung q des eben betrachteten skalaren Eigenwertproblems, so erhält man, indem man $v = \text{grad } q$ setzt, eine Lösung des Problems II. Auf diese Weise ergibt sich, daß man die sämtlichen Eigenwerte des Strahlungsproblems I erhält, indem man aus der Reihe der Eigenwerte des Problems II die sicher darunter vorhandenen Eigenwerte des skalaren Problems mit der Randbedingung $q = 0$ fortstreicht. Da wir diese letzteren nach §§ 7 und 8 beherrschen, so brauchen wir uns also nur noch mit dem einfacheren Problem II zu beschäftigen:

$$\Delta v + \lambda v = 0$$

im Inneren,

$$v \text{ normal, } \text{div } v = 0$$

am Rande R von G .

Die Randbedingung der Normalität von v drückt sich, wenn u, v, w die Komponenten von v und α, β, γ die Richtungskosinus der Normalen am Rande sind, in der Form aus

$$u = t\alpha, \quad v = t\beta, \quad w = t\gamma,$$

wo t ein, allgemein vom Orte abhängiger, Proportionalitätsfaktor ist. Die zweite Randbedingung kann man unter Berücksichtigung der ersten in die Form setzen

$$\text{Normalkomponente von } \left(\frac{\partial v}{\partial r} - K v \right) = 0.$$

Hierbei ist K eine auf der Oberfläche R beschränkte, bis auf endliche Sprünge an den Kanten stetige Funktion, nämlich die doppelte *mittlere Krümmung der Oberfläche*²⁵⁾.

²⁵⁾ Vgl. die Ausführungen bei Weyl, C 3, S. 181. Um den Leser von anderer Literatur unabhängig zu machen, sei hier kurz ein Beweis gegeben: Wir betrachten einen Punkt P der Oberfläche R , von dem wir annehmen, daß er der Nullpunkt des Koordinatensystems sei und die z -Achse zur Normalen besitze. Die Nebenbedingung (40) lautet ausgeschrieben $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$. In P ist $u = 0, v = 0, |w| = |v| = |v_r|$. In einem in Richtung der x -Achse gelegenen Nachbarpunkte P_1 finden wir den Wert u_1 von u , indem wir berücksichtigen, daß auch dort der Vektor v normal steht und bis auf Größen höherer Ordnung denselben Betrag $|w|$ hat wie in P . Die ebene Schnittkurve der z - x -Ebene mit der Fläche habe in P den Krümmungsradius R_1 , dann ergibt sich sofort für den Wert von u_1 im Punkte P_1 die Größe $w \frac{ds}{R_1}$, wo ds die bis auf Größen höherer Ordnung mit dx übereinstimmende Länge des Kurvenbogens PP_1 ist. An der Stelle P wird also $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{w}{R_1}$. Entsprechend gilt $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{w}{R_2}$, wenn R_2 der Krümmungsradius der von der z - y -Ebene ausgeschnittenen Kurve in P ist. Schließlich ist $\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial v_r}{\partial r}$, und hieraus ergibt sich durch Addition unmittelbar die zu beweisende Tatsache.

Entsprechend den Entwicklungen von § 1 setzen wir nun unser Differentialgleichungsproblem in ein Variationsproblem um. Wir erhalten zunächst, indem wir die Greensche Formel (11) auf die einzelnen Komponenten der betrachteten Vektoren anwenden und die Resultate addieren, folgende Tatsachen:

Für zwei mit ihren Ableitungen in G stetige Vektoren $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{w}$ besteht die Greensche Formel

$$\iiint_G \left(\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial x} \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial y} \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial z} \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z} \right) dx dy dz = - \iint_G \mathfrak{f} \Delta \mathfrak{w} dx dy dz - \iint_R \mathfrak{f} \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial \nu} do.$$

Denken wir uns nun, wie in § 1, die Eigenwerte in eine ansteigende Reihe geordnet

$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \leq \dots$$

und bezeichnen die entsprechenden Eigenvektoren mit $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \dots$, wobei für $i \geq k$ die Orthogonalitätsbeziehung

$$3) \quad \iint_G \mathfrak{e}_i \mathfrak{e}_k dx dy dz = 0$$

gilt, so erhalten wir genau wie in § 1 für den n -ten Eigenvektor $\mathfrak{e}_n$ und den zugehörigen Eigenwert μ_n folgende *Minimaleigenschaft*: Sei $\mathfrak{f}$ irgendein Vektor, welcher in G stetig und mit, höchstens an endlich vielen analytischen Flächenstücken sprunghaft unstetigen, im übrigen stetigen ersten Ableitungen versehen ist, welcher ferner den Bedingungen

$$\iint_G \mathfrak{f}^2 dx dy dz = 1, \quad \iint_G \mathfrak{f} \mathfrak{e}_i dx dy dz = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

und den Randbedingungen

$$4) \quad \mathfrak{f} \text{ normal,} \quad \operatorname{div} \mathfrak{f} = 0$$

genügt, so ist

$$\mathfrak{D}[\mathfrak{f}] = \iiint_G \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz + \iint_R \mathfrak{f} \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \nu} do \geq \mu_n,$$

bei für $\mathfrak{f} = \mathfrak{e}_n$ das Gleichheitszeichen gilt; d. h., das Variationsproblem, in dem Ausdruck

$$\mathfrak{D}[\mathfrak{f}] = D[\mathfrak{f}] + \iint_R \mathfrak{f} \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \nu} do$$

er, was dem obigen zufolge dasselbe ist, den Ausdruck

$$\mathfrak{D}[\mathfrak{f}] = D[\mathfrak{f}] + \iint_R K \mathfrak{f}^2 do$$

ein Minimum zu machen, wenn $\mathfrak{f}$ den gestellten Bedingungen genügt,

besitzt den n -ten Eigenvektor e_n zur Lösung, und der Wert des Minimums ist gleich dem n -ten Eigenwert μ_n .

Diese Minimumseigenschaft gestattet sofort genau wie in § 3 die Umsetzung in eine *Maximum-Minimums-Eigenschaft*:

Es seien $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ stetige oder stückweise stetige Vektoren in G , es sei $\mathfrak{f}$ ein Vektor, welcher den Bedingungen

$$\iiint_G \mathfrak{f}^2 dx dy dz = 1, \quad \iint_G \mathfrak{f} v_i dx dy dz = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

und den Randbedingungen (44) unterworfen wird, im übrigen in G stetig und stückweise stetig differenzierbar ist. Es sei weiter $d\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ die untere Grenze aller Werte, welche der Ausdruck

$$\mathfrak{D}[\mathfrak{f}] = D[\mathfrak{f}] + \int_R K \mathfrak{f}^2 d\sigma$$

für alle zulässigen Vektoren $\mathfrak{f}$ annehmen kann. Dann ist der n -te Eigenwert μ_n des Problems II das Maximum aller Werte, welche die Zahl $d\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ annimmt, wenn das System der $n-1$ Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ auf alle denkbaren Weisen variiert wird. Diesen Maximum-Minimum-Wert wird angenommen für $v_1 = e_1, \dots, v_{n-1} = e_{n-1}$, $\mathfrak{f} = e_n$.

Nach diesen Vorbereitungen ergeben sich die Gesetze für die Eigenwertverteilung unseres Problems folgendermaßen: Verschärfen wir zunächst die Zulassungsbedingungen für den Vektor $\mathfrak{f}$ in unserem Maximum-Minimum-Problem, indem wir verlangen, daß er in einer gegebenen, nachher hinreichend schmal zu wählenden, an die Oberfläche angrenzenden Schale identisch verschwindet, wodurch die gestellten Randbedingungen identisch erfüllt werden, so wird jedenfalls das einzelne Minimum $d\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ steigen oder nicht fallen, mithin auch das Maximum-Minimum.

Das durch die Verschärfung entstehende Maximum-Minimum-Problem fordert, den Ausdruck

$$D[\mathfrak{f}],$$

genommen für das aus G nach Abzug der Schale entstehende Restgebiet G' , zu einem Maximum-Minimum im selben Sinne wie oben zu machen, nur mit dem Unterschiede, daß auf dem Rande von G' für den Vektor identisches Verschwinden verlangt wird. Die Lösung dieses Problems bzw. des entsprechenden Differentialgleichungsproblem es kann man nun direkt angeben. Ist nämlich u'_n die n -te Eigenfunktion des skalaren Problems für das Gebiet G' und die Randbedingung $u' = 0$, und ist λ'_n der zugehörige Eigenwert, so erhalten wir die Eigenvektoren des vektoriellen Problems als die Vektoren, deren Komponenten

$$u'_n, 0, 0; \quad 0, u'_n, 0; \quad 0, 0, u'_n$$

ad. Die zugehörigen Eigenwerte sind λ'_n , und man sieht, daß jeder dieser Werte dreifach auftritt. Da die Eigenwerte λ'_n nach Satz 14 stetig von G abhängen, so erhalten wir folgendes Resultat:

Satz 25. *Die Anzahl $A(\lambda)$ der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte des Problems II ist sicher mindestens dreimal so groß wie die entsprechende Anzahl für das skalare Problem mit der Randbedingung $u=0$.*

Um auch eine Grenze nach oben zu erhalten, nehmen wir zunächst an, daß K durchweg größer oder gleich Null ist, was jedenfalls zutrifft, wenn G von einer einzigen konvexen Fläche begrenzt wird. Dann wird eher

$$\mathfrak{D}[\mathfrak{f}] \geq D[\mathfrak{f}].$$

erleichtern wir nunmehr die Zulassungsbedingungen für den Vektor $\mathfrak{f}$ in dem Variationsproblem, indem wir sämtliche Randbedingungen streichen, so erkennen wir wie oben, daß die Lösung des so entstehenden Maximum-Minimum-Problems, bei welchem das Maximum-Minimum des Ausdruckes

$$D[\mathfrak{f}]$$

bestimmen ist, einen jedenfalls nicht größeren Wert ergibt, als den Maximum-Minimum-Wert μ_n des ursprünglichen Problems. Genau wie oben erhalten wir aber die Eigenwerte des neuen Problems, indem wir die Eigenwerte des skalaren Problems

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

im Inneren,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$$

am Rande, dreifach nehmen. Wir gelangen also zu dem Ergebnis: *Unter der für K gemachten Voraussetzung ist die Anzahl der unterhalb einer Grenze gelegenen Eigenwerte des Problems II nicht größer als die dreifache Anzahl der entsprechenden Eigenwerte des skalaren Problems mit der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$.*

Da die asymptotischen Eigenwertgesetze für die skalaren Probleme übereinstimmend durch den Satz 21 gegeben werden, so erhalten wir aus diesem Satze als asymptotischen Ausdruck für die Zahl $A(\lambda)$ sofort

$$3 \frac{V}{6\pi^2} \lambda^{\frac{3}{2}}$$

und aus dem Satz 24 für den Fehler die Abschätzung

$$\left| A(\lambda) - \frac{3V}{6\pi^2} \lambda^{\frac{3}{2}} \right| < \text{const } \lambda \log \lambda.$$

Um nun noch die über K gemachte Voraussetzung abzustreifen, brauchen

wir lediglich den Hilfssatz aus § 2 anzuwenden, welcher besagt, daß das in dem Ausdruck $\mathfrak{D}[\bar{f}]$ auftretende Oberflächenintegral jedenfalls mit $D[\bar{f}]$ nicht stärker ins Unendliche wachsen kann als $\sqrt{D[\bar{f}]}$. Hieraus ergibt sich durch dieselbe Schlußweise wie in § 6, daß die oben gefundenen asymptotischen Ausdrücke bestehen bleiben, auch wenn K nicht durchweg positiv oder Null ist.

Berücksichtigen wir nun noch, daß die Eigenwerte des Strahlungsproblems erhalten werden, indem man aus denen des Problems II die Eigenwerte des skalaren Problems für die Randbedingung $u = 0$ fortstreicht, und beachten wieder das für diese geltende asymptotische Gesetz aus Satz 21, so gewinnen wir für das Strahlungsproblem folgendes Resultat.

Satz 26. *Für einen beliebigen Hohlraum vom Volumen V ist die Anzahl $S(\lambda)$ der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte des Strahlungsproblems asymptotisch gleich*

$$\frac{V}{3\pi^2} \lambda^{\frac{3}{2}},$$

und zwar gilt für hinreichend großes λ die schärfere asymptotische Formel

$$\left| S(\lambda) - \frac{V}{3\pi^2} \lambda^{\frac{3}{2}} \right| < C \lambda \log \lambda,$$

wobei C eine von λ unabhängige positive Konstante ist.

Anhang.

Die in § 1 zu der allgemeinen Fassung der Minimaleigenschaften der Eigenfunktionen benutzten Approximationssätze bedürfen, soweit sie sich nicht aus wohlbekannten Tatsachen der Analysis unmittelbar ergeben, noch einer kurzen Begründung. Es handelt sich dabei um Fragen, welche grundsätzlich in der Variationsrechnung eine Rolle spielen und welche darauf abzielen, den Bereich der zur Konkurrenz zuzulassenden Funktionen möglichst zu erweitern, ohne daß dabei die Lösung des Variationsproblems geändert wird. Auf die allgemeine Frage hoffe ich gelegentlich an anderer Stelle zurückzukommen, während ich mich hier auf das vorliegende spezielle Problem beschränken will.

Betrachten wir das Variationsproblem des Satzes 1. Es handelt sich darum, eine Funktion φ , welche in G stetig ist, stückweise stetige erste und im Innern stückweise stetige zweite Ableitungen besitzt, am Rande verschwindet, und den Bedingungen (14), (15), genügt, durch eine ebensolche Funktion φ' zu ersetzen, die in G stetig erste, im Inneren von G stückweise stetige zweite Ableitungen besitzt, deren Dirichletsches Integral

$\varphi']$ sich von dem Dirichletschen Integral $D[\varphi]$ um beliebig wenig unterscheidet und für welche das über G erstreckte Integral von $L(\varphi')^2$ bestimmt ist.

Derjenige Punkt, welcher dabei hauptsächlich einige Aufmerksamkeit verdient, ist die „Glättung“ der Funktion φ , d. h. die Ersetzung von φ durch eine in G stetig differenzierbare Funktion φ_1 . Es sei C eine solche Kurve, die möglichst ganz im Inneren von G gelegene „Kante“ der Funktion φ , d. h. eine Linie in G , längs deren die normalen Ableitungen von φ endliche Sprünge machen. Wir wollen zur Fixierung der Vorstellung annehmen, daß C eine geradlinige Strecke und zwar ein Stück der y -Achse ist. Diese Voraussetzung der Geradlinigkeit von C trifft ohnehin überall in der vorangehenden Arbeit zu und ist überdies für die folgende Beweisführung ganz unerheblich.) Ferner wollen wir, was ebenfalls für die Schreibweise bequem, aber sachlich ganz unwesentlich ist, annehmen, daß wir mit dem Differentialausdruck $L(u) = \Delta u$ und dem entsprechenden Ausdruck für $D[\varphi]$ zu tun haben.

Wird der Sprung der normalen Ableitung $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ von φ beim Überschreiten der Kante C von negativem zu positivem x mit $2v(y)$ bezeichnet, dann besitzt die stetige Funktion

$$v(x, y) = xv(y) \quad \text{für } x \geq 0,$$

$$v(x, y) = -xv(y) \quad \text{für } x \leq 0$$

auf C dieselbe Unstetigkeit der normalen Ableitungen wie φ , und die Funktion $s = \varphi - v$ ist nebst ihren ersten Ableitungen stetig.

Nunmehr schließen wir die Strecke C durch zwei Kurven C_1, C_2 mit den Gleichungen $x = \pm h(y)$ ein, welche jedenfalls C in den Endpunkten berühren und über die noch weiter verfügt werden wird. Das Gebiet zwischen diesen beiden Kurven heiße E .

Dann wird v durch eine Funktion v_1 ersetzt, welche außerhalb E mit v übereinstimmt und in E durch

$$v_1 = h \cdot v + \frac{x^2 - h^2}{2h} v$$

gegeben ist. Geometrisch gesprochen: es wird die Fläche der Funktion v glättet, indem man eine sich deformierende, normal zur Kante liegende Ebene in der Kante so gleiten läßt, daß sie dabei an den Grenzen des Gebietes E die Fläche der Funktion v berührt.

Die Funktion $h(y)$ wird jedenfalls stetig differenzierbar gewählt; man besitzt auch $v_1(x, y)$ überall stetige erste Ableitungen. Ferner wird, wenn man nur $h(y)$ überall hinreichend klein wählt, v durch v_1 gleich-

mäßig beliebig genau approximiert. Schließlich können wir $h(y)$ für jedes y so klein wählen, daß das Integral von

$$\left(\frac{\partial(v-r_1)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial(v-r_1)}{\partial y}\right)^2$$

über E , oder was dasselbe bedeutet, über G erstreckt, beliebig klein wird. Setzen wir $\varphi_1 = s + r_1$, so ist φ_1 eine Approximation an φ , und es wird

$$D[\varphi - \varphi_1] = D[v - r_1]$$

beliebig klein. Da nun

$$D[\varphi] = D[\varphi_1] + 2D[\varphi_1, \varphi - \varphi_1] + D[\varphi - \varphi_1]$$

und

$$D[\varphi, \varphi - \varphi_1]^2 \leq D[\varphi] \cdot D[\varphi - \varphi_1]$$

ist, so wird auch $D[\varphi]$ durch $D[\varphi_1]$ beliebig genau approximiert. Diesem Glättungsprozeß sind alle vorhandenen Kanten der Funktion φ nacheinander zu unterwerfen.

Das obige Verfahren ist keineswegs an die Bedingung geknüpft, daß die Kanten ganz im Innern von G verlaufen. Man kommt jedoch, wenn Kanten sich bis an den Rand erstrecken, mit Rücksicht auf die Behandlung der zweiten Ableitungen rascher folgendermaßen zum Ziele: Man grenze längs des Randes durch einen Linienzug C einen von C und R begrenzten schmalen Streifen S ab und löse mit den — bei hinreichend schmalen Streifen beliebig kleinen — Werten, die φ auf dem Rande von S hat, als Randwerten für S die Randwertaufgabe der Potentialtheorie. Ist ϱ die Lösung, dann ist bekanntlich²⁶⁾ das Dirichletsche Integral von ϱ , über S erstreckt, nicht größer als das von φ , d. h. dieses Integral wird, ebenso wie die Funktion ϱ selbst, bei hinreichend schmalen Streifen beliebig klein. Wir können nun anstatt von der Funktion φ von vornherein von derjenigen Funktion φ_0 ausgehen, welche in S mit ϱ übereinstimmt und außerhalb S in G mit φ identisch ist. Diese Funktion φ_0 besitzt in S mit Einschluß des Randes stetige erste und zweite Ableitungen, und das Integral von $L(\varphi_0)^2$, über G erstreckt, existiert sicher.

In ähnlicher Weise können wir bei denjenigen, in endlicher Zahl zugelassenen einzelnen Punkten in G verfahren, in denen über das Verhalten der ersten Ableitungen von φ zunächst gar nichts ausgesagt ist. Wir schneiden diese Punkte durch kleine Kreise aus G aus, lösen mit den Werten, die φ auf diesen Kreisen besitzt, als Randwerten für das Innere der Kreise die Randwertaufgabe der Potentialtheorie und ersetzen dann φ im Inneren dieser Kreise durch die betreffenden Potentialfunktionen.

²⁶⁾ Vgl. z. B. eine Abhandlung des Verf. in Crelles Journal 144 (1914) S. 190 ff.

Nachdem so die Glättung der Funktion φ gesichert ist, macht die Ersetzung der geglätteten Funktion φ_1 durch eine Funktion φ_2 , welche auch den weiteren, für die zweiten Ableitungen gestellten Bedingungen genügt, keine Schwierigkeiten mehr; man braucht hierzu nur die klassischen Approximationssätze anzuwenden. Denn wir können φ_1 überall in G durch eine zweimal stetig differenzierbare Funktion φ_2 gleichmäßig beliebig approximieren, daß dabei auch die ersten Ableitungen von φ_1 gleichmäßig approximiert werden und das Integral von $L(\varphi_2)^2$ dabei endlich bleibt. Nach der oben getroffenen Wahl von φ_1 können wir hierbei mit φ_1 in einem gewissen schmalen Streifen längs des Randes als identisch annehmen.

Schließlich haben wir zu beachten, daß bei Ersetzung von φ durch φ_2 die Nebenbedingungen (14) und (15) verletzt werden können, allerdings, wenn die Approximation von φ durch φ_2 hinreichend genau ist, nur um beliebig wenig. Man kann also die Erfüllung dieser Nebenbedingungen wieder sichern, indem man die Funktion φ_2 und ihre Ableitungen bis zur zweiten Ordnung an endlich vielen Stellen im Inneren beliebig wenig in geeigneter Weise ändert. Die so entstehende Funktion φ_3 genügt dann allen gestellten Anforderungen.

Diese Betrachtungen gelten, gleichviel ob der Rand Ecken aufweist oder nicht.

Bei den Sätzen 2, 3 werden genau dieselben Betrachtungen angewandt, soweit es sich um das Glätten der Funktionen handelt. Dagegen bedarf es noch einer kleinen Überlegung, um zu erkennen, daß man tatsächlich in dem Variationsproblem die Randbedingung fortlassen darf. Betrachten wir etwa den Fall von Satz 2, so handelt es sich darum, eine in G stetige und mit stückweise stetigen ersten, im Inneren mit stückweise stetigen zweiten Ableitungen versehene Funktion φ , welche den Nebenbedingungen (14), (15) genügt, durch eine denselben Bedingungen genügende, mit stetigen ersten und im Inneren mit stückweise stetigen zweiten Ableitungen versehene Funktion φ' zu approximieren, derart, daß das über G erstreckte Integral von $L(\varphi')^2$ existiert, daß die Randbedingung $\frac{\partial \varphi'}{\partial \nu} = 0$ erfüllt ist und daß auch $D[\varphi]$ durch $D[\varphi']$ beliebig genau approximiert wird.

Wir können von vornherein voraussetzen, daß φ nach den obigen Vorschriften geglättet ist, d. h. stetige erste Ableitungen in G — höchstens mit Ausnahme der endlich vielen Eckpunkte des Randes — besitzt. Sehen wir zunächst von solchen Ausnahmepunkten ab, nehmen also G als begrenzt von durchweg stetig gekrümmten Kurven an, so können wir nach den bekannten Approximationssätzen φ von vornherein durch eine einschließlich des Randes beliebig oft, etwa dreimal stetig differenzierbare Funktion φ

ersetzen, derart, daß dabei auch die ersten Ableitungen von φ in G überall gleichmäßig approximiert werden. Nunmehr ziehen wir in G parallel oder annähernd parallel zum Rande in hinreichend klein zu wählendem Abstände d eine Kurve C , welche zusammen mit R einen schmalen Streifen S bildet, und definieren eine stetige Funktion φ_1 in G , indem wir außerhalb des Streifens S $\varphi_1 = \varphi$ setzen, in S dagegen φ_1 auf jeder Normalen zum Rande R konstante Werte beilegen. Die so entsprechende Funktion φ_1 braucht man jetzt nur längs der Kante C zu glätten und weiter wie oben zu behandeln — wobei ihre Werte in einer hinreichend engen Nachbarschaft von R unberührt bleiben —, um zu einer alle gestellten Anforderungen erfüllenden Funktion φ' zu gelangen.

Ganz analog liegt die Sache bei der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial r} = \sigma u$. Die Werte der Funktion φ_1 längs jeder der konstruierten Normalen von der Länge d sind dann gemäß dieser Gleichung zu definieren.

Besitzt der Rand R Ecken, oder besitzt die Funktion σ Unstetigkeitsstellen, so können wir nicht mehr von vornherein voraussetzen, daß φ überall in G einschließlich des Randes stetige erste Ableitungen hat. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, denken wir uns G durch eine von der identischen Transformation beliebig wenig verschiedene analytische Transformation — etwa, wenn G von einem Punkte aus konvex ist, durch eine Ähnlichkeitstransformation von diesem Punkte aus — auf ein Gebiet G' abgebildet, welches G ganz im Innern enthält. Dabei gehe der Punkt von G mit den Koordinaten x, y in einen Punkt von G' mit den Koordinaten x', y' über. Wir ersetzen nun $\varphi(x', y')$ durch $\varphi_0(x', y') = \varphi(x, y)$, wo für x, y die Ausdrücke in x', y' einzusetzen sind; offenbar stellt $\varphi_0(x, y)$ eine in G einschließlich aller Randpunkte mit stetigen ersten Ableitungen versehene Funktion dar, welche φ beliebig genau approximiert. Ferner ist sofort ersichtlich — ganz analog wie bei der entsprechenden Betrachtung in § 4 — daß das über G erstreckte Dirichletsche Integral von φ_0 sich von dem der Funktion φ um beliebig wenig unterscheidet. Nunmehr läßt sich wie oben φ_0 durch eine in G mit stetigen Ableitungen bis zur dritten Ordnung versehene Funktion φ_1 gleichmäßig approximieren, derart, daß dabei auch die Ableitungen $\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}$ gleichmäßig approximiert werden.

Von hier ab verlaufen die Schlüsse ganz wie oben. Wir müssen dabei nur, statt eine Parallelkurve C zum Rande R im Abstände d zu ziehen, die Kurve C (etwa einen geradlinien Linienzug) so führen, daß sie in sämtlichen Eckpunkten des Randes und Unstetigkeitspunkten der Funktion σ an den Rand R stößt. C bildet mit R eine endliche Anzahl schmaler Streifen, die, wie wir voraussetzen dürfen, von jeder zu dem betreffenden Randabschnitt von R gehörigen Normalen der Länge d in einem einzigen

ick durchschnitten werden. Wir können dann, analog wie oben, von den Werten der Funktion φ_1 auf C ausgehend, diese Werte durch die Blätter hindurch längs jeder Normalen gemäß der Randbedingung fortsetzen. Wenn wir die so entstehende Funktion φ_0 wie oben behandeln, gelangen wir zu einer Funktion φ' , welche die gestellten Anforderungen erfüllt.

Für den Fall von drei und mehr Dimensionen verlaufen die Betrachtungen ganz analog²⁷⁾²⁸⁾.

²⁷⁾ Man vergleiche zu den Überlegungen des Anhangs die Ausführungen bei Lichtenstein, Math. Zeitschrift 3 (1919), S. 126–160, insb. S. 134 u. S. 153.

²⁸⁾ Nach Beendigung des Druckes werde ich darauf aufmerksam gemacht, daß auch die auf S. 18 formulierte Maximum-Minimumeigenschaft der Hauptachsen eines Ellipsoids schon ebenso in einer Arbeit von E. Fischer, Monatshefte für Math. u. Phys. 16, S. 245 ausgesprochen findet.

(Eingegangen am 30. August 1919.)

Begleitmatrizen und lineare homogene Differentialausdrücke.

Von

Alfred Loewy in Freiburg i. B.

Herrn Geheimen Hofrat Professor Dr. Ludwig Stickelberger
zu seinem siebenzigsten Geburtstage
am 18. Mai 1920
in hoher Wertschätzung freundschaftlich gewidmet.

Für die Theorie der linearen homogenen Differentialausdrücke und Matrizen mit beliebigen, nicht bloß konstanten Koeffizienten sind die Matrizen n -ten Grades der besonderen Form

$$\mathfrak{B}^*: \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots & b_n \end{array} \right\|$$

von grundlegender Wichtigkeit. Solche Matrizen — sie werden in diesem Aufsatz immer durch einen beigefügten Stern bezeichnet — habe ich *Begleitmatrizen*¹⁾ genannt. Sie begleiten den linearen homogenen Differentialausdruck

$$B \equiv b_1 z + b_2 \frac{dz}{dx} + b_3 \frac{d^2 z}{dx^2} + \dots + b_n \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \frac{d^n z}{dx^n}$$

¹⁾ Diese Bezeichnung habe ich zuerst verwendet in einer 1917 in den Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, S. 255, veröffentlichten Note „Die Begleitmatrix eines linearen homogenen Differentialausdruckes.“ In dieser Note findet man eine vorläufige Mitteilung der wesentlichen Resultate des vorliegenden Aufsatzes ohne Beweise.

jeden Differentialausdruck

$$fB \equiv fb_1z + fb_2\frac{dz}{dx} + fb_3\frac{d^2z}{dx^2} + \dots + fb_n\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + f\frac{d^nz}{dx^n},$$

aus B durch Multiplikation mit einem Faktor f hervorgeht. Dabei bedeutet f eine beliebige Konstante oder eine beliebige Funktion der abhängigen Variablen x , die nur der Bedingung unterliegt, dem Rationalitätsbereich $\sum^3$) anzugehören. Ein solcher soll allen unseren Untersuchungen zugrunde liegen, und ihm sind alle im folgenden auftretenden Konstanten und Funktionen ausnahmslos zu entnehmen, also auch $b_1, b_2, \dots, b_n$. Die Begleitmatrix kann weiter noch als die zu dem Differentialsystem $\frac{dz_1}{dx} = z_2, \frac{dz_2}{dx} = z_3, \dots, \frac{dz_{n-1}}{dx} = z_n, \frac{dz_n}{dx} + b_1z_1 + b_2z_2 + \dots + b_nz_n$ gehörige Matrix erklärt werden, wobei der n -te Bestandteil des Differentialsystems auch durch jeden Ausdruck $f\frac{dz_n}{dx} + fb_1z_1 + fb_2z_2 + \dots + fb_nz_n$ ersetzt werden darf, der sich durch Multiplikation mit einer beliebigen Konstanten oder einer beliebigen Funktion f aus $\sum$ ergibt.

Zunächst erinnere ich an die Definition, wann zwei beliebige Matrizen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}$ des gleichen Grades mit Koeffizienten aus $\sum$ von derselben Art sind. Hierzu ist die Existenz einer Matrix $\mathfrak{P}$ von nicht verschwindender Determinante mit Koeffizienten aus dem der Betrachtung zugrunde liegenden Rationalitätsbereiche $\sum$ erforderlich, so daß die symbolische Matrixgleichung

$$\mathfrak{B}\mathfrak{P} = -\mathfrak{P}' + \mathfrak{P}\mathfrak{A}$$

steht; dabei ist $\mathfrak{P}'$ diejenige Matrix, deren Koeffizienten sich aus den Koeffizienten der Matrix $\mathfrak{P}$ durch Differentiation ergeben. Bei Matrizen gleichen Grades wird durch die Gleichung (1) eine symmetrische, reflexive und transitive Beziehung festgelegt. Man kann diese Definition auch so ausdrücken: Die Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gleichen Grades sind dann und nur dann von derselben Art, wenn es eine lineare homogene Substitution

$$z_i = p_{i1}y_1 + p_{i2}y_2 + \dots + p_{in}y_n \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

von nicht verschwindender Determinante gibt, die das zu der Matrix $\mathfrak{B}$ gehörige Differentialsystem

$$\frac{dz_i}{dx} + b_{i1}z_1 + b_{i2}z_2 + \dots + b_{in}z_n \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

²) Wegen der Definition eines Rationalitätsbereiches vgl. z. B. meinen Aufsatz „Über vollständig reduzierbare Differentialgleichungen“, Math. Annalen, 62 (1906), S. 90.

in das zu $\mathfrak{A}$ zugehörige Differentialsystem

$$(4) \quad \frac{dy_i}{dx} + a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{in}y_n \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

transformiert³⁾.

In den §§ 1—8 dieses Aufsatzes führe ich den Nachweis, daß die verschiedenen Darstellungsarten eines linearen homogenen Differentialausdruckes als symbolisches Produkt entsprechende Transformationen seiner Begleitmatrix in Matrizen derselben Art gegenüberstehen. Jeder Satz über die symbolische Zerlegung eines linearen homogenen Differentialausdruckes in Faktoren läßt sich in ein reines, für seine Begleitmatrix zutreffendes Matrizentheorem umsetzen und umgekehrt. Weiteres über den Inhalt der §§ 1—8 ist den Überschriften der einzelnen Paragraphen zu entnehmen. Ich möchte in der Einleitung nur noch auf eine gewisse, im § 3 gegebene Normalform hinweisen, in die sich jede Begleitmatrix bringen läßt. Sie stimmt mit jener überein, die Frobenius⁴⁾ in seiner klassischen Arbeit „Theorie der linearen Formen mit ganzen Koeffizienten“ bei Matrizen mit *konstanten* Koeffizienten verwendet und die durch die hier vorliegenden Untersuchungen einen viel weitergehenden Geltungsbereich erhält.

Die Sätze der §§ 1—8 sind, wie ich erwähne, über die Theorie der linearen homogenen Differentialausdrücke und über die spezielle Art von Matrizen, die ich Begleitmatrizen nenne, hinaus für jede beliebige Matrix und daher für jedes beliebige lineare homogene Differentialsystem von Bedeutung; in einer früheren Arbeit⁵⁾ habe ich nämlich gezeigt, daß jede Matrix in einem Rationalitätsbereiche, der nicht nur aus Konstanten besteht, sondern auch eine wirkliche Funktion der unabhängigen Variablen x enthält, mit einer Begleitmatrix von derselben Art ist, also in diese übergeführt werden kann.

§ 9 beschäftigt sich mit Differentialausdrücken derselben Art. Dem Begriff, daß ein Differentialausdruck vorn in der durch einen anderen bestimmten Art enthalten ist, stelle ich den des hinteren Enthaltenseins zur Seite. Jede der zwei Weisen des Enthaltenseins eines Differentialausdruckes in der durch einen anderen bestimmten Art läßt sich in einen entsprechenden Satz über Begleitmatrizen umsetzen. Während die Sätze der §§ 1—9 neu

³⁾ Über die Gleichung (1) vergleiche meinen Aufsatz: „Über Matrizen- und Differentialkomplexe I“, Math. Annalen, 78 (1917), S. 5—11; dort werden statt einer Einzelmatrix Matrizenkomplexe betrachtet.

⁴⁾ G. Frobenius, Journ. f. r. u. ang. Math., 86 (1879), S. 206.

⁵⁾ Über einen Fundamentalsatz für Matrizen oder lineare homogene Differentialsysteme, Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wiss., Jahrgang 1918, 5. Abhandlung.

enthält § 10 neue Beweise meiner Zerlegungssätze für lineare homogene Differentialausdrücke, nämlich des Satzes von der gleichmöglichen Zerlegbarkeit zweier linearer homogener Differentialausdrücke derselben Art⁶⁾ sowie meiner Eindeutigkeitssätze über die Zerlegung zweier linearer homogener Differentialausdrücke derselben Art in irreduzible, in aufeinanderfolgende vordere bzw. hintere größte vollständig reduzible Faktoren; aus den letzteren ergeben sich, da jeder Differentialausdruck sich selbst von derselben Art ist, als Spezialfälle die Eindeutigkeitssätze über die Zerlegung irgendeines Differentialausdruckes in irreduzible⁷⁾ bzw. in aufeinanderfolgende vordere größte vollständig reduzible⁸⁾ bzw. in aufeinanderfolgende hintere größte vollständig reduzible⁹⁾ Faktoren. Während das Theorem von der gleichmöglichen Zerlegbarkeit zweier linearer homogener Differentialausdrücke derselben Art jetzt fast selbstverständlich erscheint, folgen die drei erwähnten Eindeutigkeitssätze hier als Spezialfälle aus den Eindeutigkeitssätzen, die ich für die Zerlegung eines Differentialausdrucks in irreduzible¹⁰⁾ bzw. in aufeinanderfolgende vordere

⁶⁾ Gemeint ist der zuerst in meinem Aufsatz, „Über lineare homogene Differentialausdrücke derselben Art“, Math. Annalen, 70 (1911), S. 551 ausgesprochene und bewiesene Satz. Auf andere Art habe ich ihn bewiesen in dem Aufsatz: „Zur Theorie der linearen homogenen Differentialausdrücke“, Math. Annalen, 72 (1912), S. 203; der Beweis ist auch übergegangen in die Göttinger Dissertation von H. Blumberg, „Über die algebraischen Eigenschaften von linearen homogenen Differentialausdrücken“, Göttingen 1912.

⁷⁾ Der Satz über die Zerlegung eines Differentialausdruckes in irreduzible Faktoren findet sich in meinem Aufsatz: „Über reduzible lineare homogene Differentialausdrücke“, Math. Annalen, 56 (1903), S. 565. Einen Beweis des fraglichen Satzes auf gleicher Grundlage, jedoch unter Vermeidung der Integralexistenz, hat H. Blumberg in der in Anmerkung ⁶⁾ zitierten Dissertation, S. 30 gegeben. Die Verallgemeinerung des Theorems auf Differentialausdrücke derselben Art, die hier in § 10 als Primäre erscheint, habe ich in dem in Anmerkung ⁶⁾ genannten Aufsatz, Math. Annalen, 70, S. 559, erstmalig publiziert.

⁸⁾ Die Zerlegung in aufeinanderfolgende vordere größte vollständig reduzible Faktoren findet sich zum ersten Male in dem Aufsatz: „Über die Zerlegungen eines linearen homogenen Differentialausdruckes in größte vollständig reduzible Faktoren“, Monatsberichte der Heidelberger Akademie der Wiss., Jahrgang 1917, 8. Abhandlung. Satz II, S. 13 und seine Erweiterung auf Differentialausdrücke derselben Art, Math. Annalen, 74, S. 18.

⁹⁾ Den Satz über die Zerlegung eines Differentialausdruckes in aufeinanderfolgende hintere größte vollständig reduzible Faktoren habe ich zuerst veröffentlicht in dem in Anmerkung ²⁾ genannten Aufsatz, Math. Annalen, 62 (1906), S. 112; seine Verallgemeinerung auf Differentialausdrücke derselben Art findet sich in dem in Anmerkung ⁶⁾ genannten Aufsatz, Math. Annalen, 70, S. 559.

¹⁰⁾ Satz α) in der in Anmerkung ³⁾ genannten Arbeit, Math. Annalen, 78, S. 21.

größte vollständig reduzible¹¹⁾ bzw. in aufeinanderfolgende hintere größt vollständig reduzible¹²⁾ Matrizenkomplexe aufgestellt habe und die natürlich a fortiori für eine einzelne Matrix gültig sind.

§ 1.

Die Begleitmatrix eines linearen homogenen Differentialausdruckes, das das Produkt zweier Differentialausdrücke ist, läßt sich als reduzible Matrix besonderer Form darstellen.

In diesem Paragraphen beweisen wir den folgenden

Satz I. *Ist der Differentialausdruck*

$$B: \beta_1 z + \beta_2 \frac{dz}{dx} + \beta_3 \frac{d^2 z}{dx^2} + \dots + \beta_n \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \beta_{n+1} \frac{d^n z}{dx^n} \quad (\beta_{n+1} \neq 0)$$

das symbolische Produkt $B = GH$ der zwei linearen homogenen Differentialausdrücke

$$G \equiv g_1 z + g_2 \frac{dz}{dx} + g_3 \frac{d^2 z}{dx^2} + \dots + g_{j+1} \frac{d^j z}{dx^j} \quad (g_{j+1} \neq 0)$$

und

$$H \equiv h_1 z + h_2 \frac{dz}{dx} + h_3 \frac{d^2 z}{dx^2} + \dots + h_{l+1} \frac{d^l z}{dx^l} \quad (h_{l+1} \neq 0) \quad (j+l=n)$$

so ist die zu dem Differentialausdruck B zugehörige Begleitmatrix $\Re$ von derselben Art mit der folgenden Matrix

$$\Re: \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{g_1}{g_{j+1}} & \frac{g_2}{g_{j+1}} & \frac{g_3}{g_{j+1}} & \dots & \frac{g_j}{g_{j+1}} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ -\frac{1}{h_{l+1}} & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{h_1}{h_{l+1}} & \frac{h_2}{h_{l+1}} & \frac{h_3}{h_{l+1}} & \dots & \frac{h_l}{h_{l+1}} \end{vmatrix}$$

Beim Beweise bedienen wir uns n willkürlicher Funktionen $z_1, z_2, \dots, z_n$ und bilden aus ihnen n neue Funktionen $y_1, y_2, \dots, y_n$, die wir definieren:

¹¹⁾ Satz β) in der in Anmerkung ¹⁰⁾ genannten Arbeit, S. 35.

¹²⁾ Satz γ) in dem Aufsatz: „Über Matrizen- und Differentialkomplexe II“ Math. Annalen, 78 (1918), S. 350.

$$y_1 = h_1 z_1 + h_2 z_2 + h_3 z_3 + \dots + h_l z_l + h_{l+1} z_{l+1},$$

$$y_2 = \frac{d h_1}{d x} z_1 + \left(\frac{d h_2}{d x} + h_1 \right) z_2 + \left(\frac{d h_3}{d x} + h_2 \right) z_3 + \dots + \left(\frac{d h_{l+1}}{d x} + h_l \right) z_{l+1} \\ + h_{l+1} z_{l+2}$$

oder

$$y_2 = h_1^{(2)} z_1 + h_2^{(2)} z_2 + h_3^{(2)} z_3 + \dots + h_{l+2}^{(2)} z_{l+2},$$

$$\text{wobei } h_1^{(2)} = \frac{d h_1}{d x}, \quad h_2^{(2)} = \frac{d h_2}{d x} + h_1, \quad h_3^{(2)} = \frac{d h_3}{d x} + h_2, \quad \dots,$$

$$h_{l+1}^{(2)} = \frac{d h_{l+1}}{d x} + h_l, \quad h_{l+2}^{(2)} = h_{l+1} \quad \text{ist, weiter}$$

$$y_3 = \frac{d h_1^{(2)}}{d x} z_1 + \left(\frac{d h_2^{(2)}}{d x} + h_1^{(2)} \right) z_2 + \left(\frac{d h_3^{(2)}}{d x} + h_2^{(2)} \right) z_3 + \dots \\ + \left(\frac{d h_{l+2}^{(2)}}{d x} + h_{l+1}^{(2)} \right) z_{l+2} + h_{l+2}^{(2)} z_{l+3}$$

oder

$$y_3 = h_1^{(3)} z_1 + h_2^{(3)} z_2 + h_3^{(3)} z_3 + \dots + h_{l+2}^{(3)} z_{l+2} + h_{l+3}^{(3)} z_{l+3},$$

$$\text{wobei } h_1^{(3)} = \frac{d h_1^{(2)}}{d x}, \quad h_2^{(3)} = \frac{d h_2^{(2)}}{d x} + h_1^{(2)}, \quad \dots, \quad h_{l+2}^{(3)} = \frac{d h_{l+2}^{(2)}}{d x} + h_{l+1}^{(2)},$$

$$h_{l+3}^{(3)} = h_{l+2}^{(2)} = h_{l+1} \quad \text{ist.}$$

So fortfahrend, führen wir y_j ein:

$$y_j = h_1^{(j)} z_1 + h_2^{(j)} z_2 + \dots + h_{l+j}^{(j)} z_n,$$

$$\text{wobei } h_1^{(j)} = \frac{d h_1^{(j-1)}}{d x}, \quad h_2^{(j)} = \frac{d h_2^{(j-1)}}{d x} + h_1^{(j-1)}, \quad \dots,$$

$$h_{l+j-1}^{(j)} = \frac{d h_{n-1}^{(j-1)}}{d x} + h_{n-2}^{(j-1)}, \quad h_n^{(j)} = h_{n-1}^{(j-1)} = \dots = h_{l+1} \quad \text{ist.}$$

Schließlich definieren wir

$$y_{j+1} = z_1, \quad y_{j+2} = z_2, \quad y_{j+3} = z_3, \quad \dots, \quad y_n = z_l.$$

Symbolisch fassen wir die Gleichungen (5) in die Matrizengleichung

$$(y) = \mathfrak{S}(z)$$

ammen, wobei (y) und (z) die speziellen Matrizen

$$\left\| \begin{array}{cccccc} y_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ y_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ y_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\| \quad \text{und} \quad \left\| \begin{array}{cccccc} z_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ z_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\|$$

bedeuten. Die Determinante der Matrix $\mathfrak{S}$ ist ungleich Null, wie entweder die Ausrechnung lehrt oder aus der Möglichkeit der Auflösung der Gleichungen (5) nach $z_1, z_2, \dots, z_n$ hervorgeht; denn die letzten l Gleichungen ergeben $z_1, z_2, \dots, z_l$ ausgedrückt durch $y_{j+1}, y_{j+2}, \dots, y_n$, und aus den ersten kann man der Reihe nach die auf der rechten Seite jeweils neu auftretenden Funktionen $z_{l+1}, z_{l+2}, \dots, z_n$, die alle den gleichen Faktor $h_{l+1} (\neq 0)$ haben, finden.

Wir führen noch z_{n+1} ein durch die Relation

$$(6) \quad \frac{-g_1}{g_{j+1}} y_1 - \frac{g_2}{g_{j+1}} y_2 \dots - \frac{g_j}{g_{j+1}} y_j \\ = h_1^{(j+1)} z_1 + h_2^{(j+1)} z_2 + \dots + h_{l+j}^{(j+1)} z_n + h_{n+1}^{(j+1)} z_{n+1}$$

wobei $h_1^{(j+1)} = \frac{d h_1^{(j)}}{d x}$, $h_2^{(j+1)} = \frac{d h_2^{(j)}}{d x} + h_1^{(j)}$, $\dots$, $h_n^{(j+1)} = \frac{d h_n^{(j)}}{d x} + h_{n-1}^{(j)}$,

$$h_{n+1}^{(j+1)} = h_n^{(j)} = h_{n-1}^{(j-1)} = \dots = h_{l+1} \text{ ist.}$$

Da sich $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$ nach den Formeln (5) und (6) als lineare homogene Funktionen von $y_1, y_2, \dots, y_n$ ausdrücken lassen, besteht zwischen $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$ eine lineare homogene Relation

$$(7) \quad \gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 + \gamma_3 z_3 + \dots + \gamma_{n+1} z_{n+1} = 0.$$

Infolge der linearen Unabhängigkeit von $z_1, z_2, \dots, z_n$ ist $\gamma_{n+1} \neq 0$. Da die Relation (7) auch mit einer beliebigen Funktion des Rationalitätsbereiches multipliziert werden darf, kann man γ_{n+1} so gewählt denken, daß γ_{n+1} den Wert

$$(8) \quad \gamma_{n+1} = g_{j+1} \cdot h_{l+1}$$

erhält, also gleich dem Koeffizienten β_{n+1} der höchsten Ableitung des vorgelegten Differentialausdruckes B wird.

Wir bilden jetzt ein zu der Matrix $\mathfrak{R}$ zugehöriges Differentialsystem

$$\frac{d y_1}{d x} - y_2, \frac{d y_2}{d x} - y_3, \dots, \frac{d y_{j-1}}{d x} - y_j, \frac{d y_j}{d x} + \frac{g_1}{g_{j+1}} y_1 + \frac{g_2}{g_{j+1}} y_2 + \dots + \frac{g_j}{g_{j+1}} y_j, \\ \frac{d y_{j+1}}{d x} - y_{j+2}, \frac{d y_{j+2}}{d x} - y_{j+3}, \dots, \frac{d y_n}{d x} - \frac{y_1}{h_{l+1}} + \frac{h_1}{h_{l+1}} y_{j+1} + \frac{h_2}{h_{l+1}} y_{j+2} + \dots + \frac{h_l}{h_{l+1}} y_n$$

Auf Grund der Gleichungen (5) wird dann

$$-y_2 = h_1 \left(\frac{dz_1}{dx} - z_2 \right) + h_2 \left(\frac{dz_2}{dx} - z_3 \right) + \dots + h_{l+1} \left(\frac{dz_{l+1}}{dx} - z_{l+2} \right),$$

$$-y_3 = h_1^{(2)} \left(\frac{dz_1}{dx} - z_2 \right) + h_2^{(2)} \left(\frac{dz_2}{dx} - z_3 \right) + \dots + h_{l+1}^{(2)} \left(\frac{dz_{l+1}}{dx} - z_{l+2} \right)$$

$$+ h_{l+2}^{(2)} \left(\frac{dz_{l+2}}{dx} - z_{l+3} \right),$$

$$-y_j = h_1^{(j-1)} \left(\frac{dz_1}{dx} - z_2 \right) + h_2^{(j-1)} \left(\frac{dz_2}{dx} - z_3 \right) + \dots + h_{l+j-1}^{(j-1)} \left(\frac{dz_{n-1}}{dx} - z_n \right),$$

$$+ \frac{g_1}{g_{j+1}} y_1 + \frac{g_2}{g_{j+1}} y_2 + \dots + \frac{g_j}{g_{j+1}} y_j = h_1^{(j)} \left(\frac{dz_1}{dx} - z_2 \right)$$

$$+ h_2^{(j)} \left(\frac{dz_2}{dx} - z_3 \right) + \dots + h_n^{(j)} \left(\frac{dz_n}{dx} - z_{n+1} \right)^{13} = h_1^{(j)} \left(\frac{dz_1}{dx} - z_2 \right) + h_2^{(j)} \left(\frac{dz_2}{dx} - z_3 \right)$$

$$+ \dots + h_n^{(j)} \left(\frac{dz_n}{dx} + \frac{\gamma_1}{\gamma_{n+1}} z_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_{n+1}} z_2 + \dots + \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}} z_n \right)^{14},$$

$$-y_{j+2} = \frac{dz_1}{dx} - z_2,$$

$$-y_{j+3} = \frac{dz_2}{dx} - z_3,$$

$$-y_n = \frac{dz_{l-1}}{dx} - z_l,$$

$$-\frac{y_1}{h_{l+1}} + \frac{h_1}{h_{l+1}} y_{j+1} + \frac{h_2}{h_{l+1}} y_{j+2} + \dots + \frac{h_l}{h_{l+1}} y_n = \frac{dz_l}{dx} - z_{l+1}.$$

Wir bezeichnen die Begleitmatrix des Differentialausdruckes

$$\gamma_1 z + \gamma_2 \frac{dz}{dx} + \dots + \gamma_{n+1} \frac{d^n z}{dx^n}$$

Γ^* , also

$$\Gamma^*: \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ \frac{\gamma_1}{\gamma_{n+1}} & \frac{\gamma_2}{\gamma_{n+1}} & \frac{\gamma_3}{\gamma_{n+1}} & \dots & \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}} \end{array} \right\|$$

Weiter denken wir an die symbolische Transformationsgleichung $(y) = \mathfrak{S}(z)$ erinnern uns, daß $\mathfrak{R}$ die Matrix des in den Formeln (9) linkerhand

¹³⁾ Hierbei wurde auch die Gleichung (6) benützt.

¹⁴⁾ Hierbei wurde Gleichung (7) verwendet.

stehenden Differentialsystems ist. Dann lassen sich die Gleichungen (9) in die eine symbolische Matrizengleichung

$$(10) \quad \left(\frac{dy}{dx}\right) + \Re(y) = \mathfrak{S} \left(\left(\frac{dz}{dx}\right) + \Gamma^*(z) \right)$$

zusammenfassen; dabei bedeuten $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ die aus (y) und (z) hervorgehenden Matrizen, wenn man y_i bzw. z_i durch $\frac{dy_i}{dx}$ bzw. durch $\frac{dz_i}{dx}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ersetzt. Aus $(y) = \mathfrak{S}(z)$ folgt durch Differentiation $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \mathfrak{S} \left(\frac{dz}{dx}\right) + \mathfrak{S}'(z)$, wobei unter $\mathfrak{S}'$ diejenige Matrix zu verstehen ist, die aus $\mathfrak{S}$ dadurch hervorgeht, daß man alle Elemente der Matrix $\mathfrak{S}$ durch ihre Abgeleiteten ersetzt. Führt man für (y) und $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ihre Werte in (10) ein, so ergibt sich

$$\mathfrak{S} \left(\frac{dz}{dx}\right) + \mathfrak{S}'(z) + \Re \mathfrak{S}(z) = \mathfrak{S} \left(\frac{dz}{dx}\right) + \mathfrak{S} \Gamma^*(z)$$

oder

$$\Re \mathfrak{S}(z) = -\mathfrak{S}'(z) + \mathfrak{S} \Gamma^*(z).$$

Hat man aber eine Matrizengleichung $\mathfrak{P}(z) = \mathfrak{Q}(z)$ zwischen zwei beliebigen Matrizen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ des gleichen Grades n , ausführlich geschrieben $p_{i1}z_1 + p_{i2}z_2 + \dots + p_{in}z_n = q_{i1}z_1 + q_{i2}z_2 + \dots + q_{in}z_n$ ($i = 1, 2, \dots, n$), so folgt aus der linearen Unabhängigkeit der n Funktionen $z_1, z_2, \dots, z_n$, daß $p_{ik} = q_{ik}$ ($i = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, n$) wird, also die Matrizen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ übereinstimmen. Mithin ist in unserem Falle

$$(11) \quad \Re \mathfrak{S} = -\mathfrak{S}' + \mathfrak{S} \Gamma^*.$$

Da die Determinante von $\mathfrak{S}$, wie bereits erwähnt, ungleich Null ist, besagt die Relation (11), daß die Matrizen $\Re$ und Γ^* gegenseitig von derselben Art sind. Zur Vollendung des Beweises unseres Satzes I bleibt jetzt nur noch zu zeigen, daß die zwei Differentialausdrücke

$$\Gamma \equiv \gamma_1 z + \gamma_2 \frac{dz}{dx} + \dots + \gamma_{n+1} \frac{d^n z}{dx^n}$$

und

$$B \equiv \beta_1 z + \beta_2 \frac{dz}{dx} + \dots + \beta_{n+1} \frac{d^n z}{dx^n}$$

identisch sind, also Γ^* die Begleitmatrix von B ist.

Aus (5) und (6) folgt die Identität

$$(12) \quad \frac{g_1}{g_{j+1}} (h_1 z_1 + h_2 z_2 + \dots + h_{i+1} z_{i+1}) + \frac{g_2}{g_{j+1}} (h_1^{(2)} z_1 + h_2^{(2)} z_2 + \dots + h_{i+2}^{(2)} z_{i+2}) \\ + \frac{g_3}{g_{j+1}} (h_1^{(3)} z_1 + h_2^{(3)} z_2 + \dots + h_{i+3}^{(3)} z_{i+3}) + \dots + \frac{g_j}{g_{j+1}} (h_1^{(j)} z_1 + h_2^{(j)} z_2 + \dots + h_{i+j}^{(j)} z_{i+j}) \\ + (h_1^{(j+1)} z_1 + h_2^{(j+1)} z_2 + \dots + h_{n+1}^{(j+1)} z_{n+1}) = 0.$$

Für die n unabhängigen Größen $z_1, z_2, \dots, z_n$ wählen wir eine Funktion z und ihre Abgeleiteten $\frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}$. Dann geht $h_1 z_1 + h_2 z_2 + \dots + h_{l+1} z_{l+1}$ über in

$$H \equiv h_1 z + h_2 \frac{dz}{dx} + \dots + h_{l+1} \frac{d^l z}{dx^l}.$$

Weiter transformieren sich

$$h_1^{(2)} z_1 + h_2^{(2)} z_2 + \dots + h_{l+2}^{(2)} z_{l+2}, \quad h_1^{(3)} z_1 + h_2^{(3)} z_2 + \dots + h_{l+3}^{(3)} z_{l+3}, \\ \dots, \quad h_1^{(j)} z_1 + h_2^{(j)} z_2 + \dots + h_n^{(j)} z_n,$$

wie aus der Bildung ihrer Koeffizienten (vgl. (5)) folgt, in

$$\frac{dH}{dx}, \quad \frac{d^2 H}{dx^2}, \quad \dots, \quad \frac{d^{j-1} H}{dx^{j-1}}.$$

Schließlich geht $h_1^{(j+1)} z_1 + h_2^{(j+1)} z_2 + \dots + h_{n+1}^{(j+1)} z_{n+1}$, wo noch $h_{n+1}^{(j+1)} z_{n+1} = h_{l+1} z_{n+1}$ auftritt, während $h_{l+1} \frac{d^n z}{dx^n}$ fehlt, über in

$$\frac{d^j H}{dx^j} + h_{l+1} \left(z_{n+1}^0 - \frac{d^n z}{dx^n} \right).$$

Dabei ist z_{n+1}^0 diejenige Funktion, die aus z_{n+1} hervorgeht, wenn man $z_1, z_2, \dots, z_n$ durch $z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}$ ersetzt. Nach (7) ist demnach

$$z_{n+1}^0 = - \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_{n+1}} z + \frac{\gamma_2}{\gamma_{n+1}} \frac{dz}{dx} + \frac{\gamma_3}{\gamma_{n+1}} \frac{d^2 z}{dx^2} + \dots + \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}} \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} \right).$$

Infolge unserer Spezialisierung ergibt sich mithin aus (12) die Gleichung

$$\frac{g_1}{g_{j+1}} H + \frac{g_2}{g_{j+1}} \frac{dH}{dx} + \frac{g_3}{g_{j+1}} \frac{d^2 H}{dx^2} + \dots + \frac{g_j}{g_{j+1}} \frac{d^{j-1} H}{dx^{j-1}} + \frac{d^j H}{dx^j} \\ - h_{l+1} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_{n+1}} z + \frac{\gamma_2}{\gamma_{n+1}} \frac{dz}{dx} + \frac{\gamma_3}{\gamma_{n+1}} \frac{d^2 z}{dx^2} + \dots + \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}} \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \frac{d^n z}{dx^n} \right) = 0$$

oder

$$g_1 H + g_2 \frac{dH}{dx} + \dots + g_{j+1} \frac{d^j H}{dx^j} = \frac{g_{j+1} \cdot h_{l+1}}{\gamma_{n+1}} \left[\gamma_1 z + \gamma_2 \frac{dz}{dx} + \dots + \gamma_{n+1} \frac{d^n z}{dx^n} \right].$$

Nun ist nach (8) $\gamma_{n+1} = g_{j+1} \cdot h_{l+1}$ und weiter war G der Differentialausdruck

$$g_1 z + g_2 \frac{dz}{dx} + g_3 \frac{d^2 z}{dx^2} + \dots + g_{j+1} \frac{d^j z}{dx^j};$$

folglich ist

$$\gamma_1 z + \gamma_2 \frac{dz}{dx} + \gamma_3 \frac{d^2 z}{dx^2} + \dots + \gamma_{n+1} \frac{d^n z}{dx^n},$$

wie behauptet wurde, identisch mit dem symbolischen Produkte $B = GH$.

§ 2.

Ein linearer homogener Differentialausdruck ist als Produkt darstellbar, wenn seine Begleitmatrix reduzibel ist.

Während im § 1 aus der Zerlegbarkeit des Differentialausdruckes $B = GH$ die Transformation seiner Begleitmatrix $\mathfrak{B}^*$ erschlossen wurde, soll nun umgekehrt aus der Möglichkeit einer Transformation der Begleitmatrix $\mathfrak{B}^*$ die Zerlegbarkeit des Differentialausdruckes B abgeleitet werden. Wir beweisen den folgenden

Satz II. Ist die Begleitmatrix

$$\mathfrak{B}^*: \left\| \begin{array}{cccc} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ \frac{\beta_1}{\beta_{n+1}} & \frac{\beta_2}{\beta_{n+1}} & \frac{\beta_3}{\beta_{n+1}} & \dots & \frac{\beta_n}{\beta_{n+1}} \end{array} \right\|$$

eines linearen homogenen Differentialausdruckes

$$B \equiv \beta_1 z + \beta_2 \frac{dz}{dx} + \beta_3 \frac{d^2 z}{dx^2} + \dots + \beta_n \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \beta_{n+1} \frac{d^n z}{dx^n}$$

von derselben Art mit einer reduziblen Matrix

$$\mathfrak{S}: \left\| \begin{array}{cccc} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1j} & 0 & \dots & 0 \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2j} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ s_{j1} & s_{j2} & \dots & s_{jj} & 0 & \dots & 0 \\ s_{j+1,1} & s_{j+1,2} & \dots & s_{j+1,j} & s_{j+1,j+1} & \dots & s_{j+1,n} \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nj} & s_{nj+1} & \dots & s_{nn} \end{array} \right\|,$$

so ist der Differentialausdruck B darstellbar als symbolisches Produkt der Form $B = S_1 S_2$, dabei haben die Differentialausdrücke S_1 und S_2 die Ordnungen j und $l = n - j$, und es ist die Begleitmatrix $\mathfrak{S}_1^*$ des Differentialausdruckes S_1 mit der links oben stehenden Matrix $\|s_{ik}\|$ ($i, k = 1, 2, \dots, j$) und die Begleitmatrix $\mathfrak{S}_2^*$ des Differentialausdruckes S_2 mit der rechts unten stehenden Matrix $\|s_{ik}\|$ ($i, k = j+1, j+2, \dots, n$) von derselben Art.

Dem Beweise des Satzes II schicke ich zwei Bemerkungen voraus, von denen ich später mehrfach Gebrauch mache:

$\alpha) \mathfrak{A} \equiv \|a_{ik}\|$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$) sei eine beliebige Matrix n -ten

Grades mit Koeffizienten α_{ik} aus dem Rationalitätsbereich $\sum$. Aus den Elementen von $\mathfrak{A}$ bilde man mit irgend n Größen $p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1n}$ aus $\sum$ sukzessiv

$$(13) \quad p_{i+1,k} = p'_{ik} - \sum_{s=1}^{s=n} p_{is} a_{sk} \quad (i = 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots, n),$$

wobei p'_{ik} die Differentialquotienten der p_{ik} sind. Mittels n unbestimmter Funktionen $y_1, y_2, \dots, y_n$ seien folgende Linearfunktionen

$$(14) \quad z_i = p_{i1} y_1 + p_{i2} y_2 + \dots + p_{in} y_n \quad (i = 1, 2, \dots)$$

definiert.

Da die z_i Linearfunktionen von $y_1, y_2, \dots, y_n$ sind, können höchstens immer n Funktionen $z_1, z_2, \dots$ linear unabhängig sein. Wir behaupten: Sind $z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_q}$ irgend q der Funktionen $z_1, z_2, \dots$, zwischen denen eine Relation

$$(15) \quad \beta_{i_1} z_{i_1} + \beta_{i_2} z_{i_2} + \dots + \beta_{i_q} z_{i_q} = 0$$

besteht, so folgt aus ihr

$$(16) \quad \beta'_{i_1} z_{i_1} + \beta'_{i_2} z_{i_2} + \dots + \beta'_{i_q} z_{i_q} + \beta_{i_1} z_{i_1+1} + \beta_{i_2} z_{i_2+1} + \dots + \beta_{i_q} z_{i_q+1} = 0;$$

dabei sind $\beta'_{i_1}, \beta'_{i_2}, \dots, \beta'_{i_q}$ die Abgeleiteten von $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_q}$.

Da $y_1, y_2, \dots, y_n$ linear unabhängig sind, zieht die Relation (15) die Gleichungen

$$(17) \quad \beta_{i_1} p_{i_1 k} + \beta_{i_2} p_{i_2 k} + \dots + \beta_{i_q} p_{i_q k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

nach sich. Ihre Differentiation ergibt

$$(18) \quad \beta'_{i_1} p_{i_1 k} + \beta'_{i_2} p_{i_2 k} + \dots + \beta'_{i_q} p_{i_q k} + \beta_{i_1} p'_{i_1 k} + \beta_{i_2} p'_{i_2 k} + \dots + \beta_{i_q} p'_{i_q k} = 0$$

oder nach (13)

$$(19) \quad \beta'_{i_1} p_{i_1 k} + \beta'_{i_2} p_{i_2 k} + \dots + \beta'_{i_q} p_{i_q k} + \beta_{i_1} p_{i_1+1,k} + \beta_{i_2} p_{i_2+1,k} + \dots + \beta_{i_q} p_{i_q+1,k} + \beta_{i_1} \sum_{s=1}^{s=n} p_{i_1 s} a_{sk} + \beta_{i_2} \sum_{s=1}^{s=n} p_{i_2 s} a_{sk} + \dots + \beta_{i_q} \sum_{s=1}^{s=n} p_{i_q s} a_{sk} = 0.$$

Für den letzten Teil von (19) erhält man

$$\begin{aligned} & \beta_{i_1} \sum_{s=1}^{s=n} p_{i_1 s} a_{sk} + \beta_{i_2} \sum_{s=1}^{s=n} p_{i_2 s} a_{sk} + \dots + \beta_{i_q} \sum_{s=1}^{s=n} p_{i_q s} a_{sk} \\ &= a_{1k} [\beta_{i_1} p_{i_1 1} + \beta_{i_2} p_{i_2 1} + \dots + \beta_{i_q} p_{i_q 1}] + a_{2k} [\beta_{i_1} p_{i_1 2} + \beta_{i_2} p_{i_2 2} + \dots + \beta_{i_q} p_{i_q 2}] \\ & \quad + \dots + a_{nk} [\beta_{i_1} p_{i_1 n} + \beta_{i_2} p_{i_2 n} + \dots + \beta_{i_q} p_{i_q n}]. \end{aligned}$$

Da dieser Ausdruck nach (17) Null ist, geht (19) über in

$$\beta'_{i_1} p_{i_1 k} + \beta'_{i_2} p_{i_2 k} + \dots + \beta'_{i_q} p_{i_q k} + \beta_{i_1} p_{i_1+1, k} + \beta_{i_2} p_{i_2+1, k} + \dots + \beta_{i_q} p_{i_q+1, k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Denkt man die letzten Gleichungen der Reihe nach für $k = 1, 2, \dots, n$ hingeschrieben und mit $y_1, y_2, \dots, y_n$ multipliziert, so folgt durch ihre Addition die gewünschte Relation (16), die bewiesen werden sollte.

β) Die zu Anfang dieses Paragraphen definierte Begleitmatrix $\mathfrak{B}^*$ ist dann und nur dann mit der Matrix $\mathfrak{A} \equiv ||a_{ik}||$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$) von derselben Art, wenn man n Größen $p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1n}$ aus dem Rationalitätsbereiche $\sum$ von folgender Beschaffenheit finden kann: Bildet man aus ihnen sukzessiv nach den Gleichungen

$$(13) \quad p_{i+1, k} = p'_{ik} - \sum_{s=1}^{s=n} p_{is} a_{sk} \quad (i = 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots, n)$$

und führt weiter

$$(14) \quad z_i = p_{i1} y_1 + p_{i2} y_2 + \dots + p_{in} y_n$$

ein, so sind $z_1, z_2, \dots, z_n$ linear unabhängig und zwischen $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$ besteht die Relation

$$(20) \quad \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \dots + \beta_{n+1} z_{n+1} = 0 \quad (\beta_{n+1} \neq 0)$$

wobei $\frac{\beta_1}{\beta_{n+1}}, \frac{\beta_2}{\beta_{n+1}}, \dots, \frac{\beta_n}{\beta_{n+1}}$ die Elemente der letzten Zeile der Begleitmatrix $\mathfrak{B}^*$ sind¹⁵⁾.

Sind die Matrizen $\mathfrak{B}^*$ und $\mathfrak{A}$ von derselben Art, so ist hierfür nach der Einleitung das Bestehen der Matrizenrelation

$$(21) \quad \mathfrak{B}^* \mathfrak{P} = -\mathfrak{P}' + \mathfrak{P} \mathfrak{A}$$

charakteristisch, wobei $\mathfrak{P}$ eine nicht verschwindende Determinante hat. Findet nun die Matrizengleichung (21) statt, so führe man zu den durch $\mathfrak{P}$ gegebenen n^2 Größen p_{ik} ($i, k = 1, 2, \dots, n$) noch ein

$$(22) \quad p_{n+1, k} = -\frac{\beta_1}{\beta_{n+1}} p_{1k} - \frac{\beta_2}{\beta_{n+1}} p_{2k} - \dots - \frac{\beta_n}{\beta_{n+1}} p_{nk} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Aus der speziellen Form der Matrix $\mathfrak{B}^*$ berechnet man, indem man für die n -te Zeile die Gleichungen (22) beachtet, den Wert der Matrix $\mathfrak{B}^* \mathfrak{P}$ gleich

¹⁵⁾ Diese Umformung des Kriteriums, daß eine Begleitmatrix $\mathfrak{B}^*$ mit einer Matrix $\mathfrak{A}$ von derselben Art ist, habe ich, sogar noch weitergehend, schon in dem in Anmerkung ⁵⁾ genannten Aufsatz, Heidelberger Sitzungsberichte, Jahrgang 1918, 5. Abhandlung, S. 9 behandelt. Die unter β) befindliche Betrachtung wurde nur zur leichteren Orientierung des Lesers hier wiederholt.

$$\left\| \begin{array}{cccc} -p_{21} & -p_{22} & \dots & -p_{2n} \\ -p_{31} & -p_{32} & \dots & -p_{3n} \\ \vdots & & & \\ -p_{n+1,1} & -p_{n+1,2} & \dots & -p_{n+1,n} \end{array} \right\|.$$

Aus der Matrizenrelation (21), deren Gültigkeit wir voraussetzen wollten, ergeben sich für $i = 1, 2, \dots, n$ die gewöhnlichen Gleichungen (13). Bildet man nun mit den Größen p_{ik} ($i = 1, 2, \dots, n+1$; $k = 1, 2, \dots, n$) nach (14) die Funktionen $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$, so sind, da $\mathfrak{B}$ eine nicht verschwindende Determinante besitzt, $z_1, z_2, \dots, z_n$ linear unabhängig, während zwischen $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$, wie aus (22) folgt, die gewünschte Relation (20) besteht.

Hat man umgekehrt n Größen $p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1n}$ und definiert aus ihnen nach (13) $p_{i+1,k}$ ($i = 1, 2, \dots$; $k = 1, 2, \dots, n$) und hierauf weiter nach (14) $z_1, z_2, \dots$, so können von den Funktionen z_i nur $m \leq n$ linear unabhängig sein, da sie lineare homogene Funktionen von $y_1, y_2, \dots, y_n$ sind. Sind die ersten n Funktionen linear unabhängig, wie wir voraussetzen wollen, und besteht zwischen $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$ die Relation (20) $\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \dots + \beta_{n+1} z_{n+1} = 0$, wobei wegen der Unabhängigkeit von $z_1, z_2, \dots, z_n$ die Größe β_{n+1} ungleich Null ist, so ergibt sich aus (20) infolge der linearen Unabhängigkeit von $y_1, y_2, \dots, y_n$ das Gleichungssystem (22). Bildet man nun aus den Größen p_{ik} ($i, k = 1, 2, \dots, n$) die Matrix $\mathfrak{B}$, so setzen sich die gewöhnlichen Gleichungen (13) und (22) um in die gewünschte Matrizenrelation (21), die besagt, daß $\mathfrak{B}^*$ und $\mathfrak{A}$ von derselben Art sind. Infolge der nach Voraussetzung bestehenden linearen Unabhängigkeit von $z_1, z_2, \dots, z_n$ ist die Determinante der Matrix $\mathfrak{B}$, wie aus (14) folgt, ungleich Null.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns zu dem Beweise des am Anfange dieses Paragraphen formulierten Satzes II. Da $\mathfrak{B}^*$ und $\mathfrak{S}$ nach Voraussetzung zwei Matrizen derselben Art sind, existieren, wie unter β) ausgeführt, n Funktionen $p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1n}$ aus dem Rationalitätsbereiche mit folgenden Eigenschaften: Bildet man aus ihnen analog zu den Gleichungen (13)

$$(23) \quad p_{i+1,k} = p'_{ik} - \sum_{t=1}^{t=n} p_{it} s_{tk} \quad (i = 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots, n)$$

und führt, unter $y_1, y_2, \dots, y_n$ n unbestimmte Funktionen verstanden,

$$(24) \quad z_i = p_{i1} y_1 + p_{i2} y_2 + \dots + p_{in} y_n \quad (i = 1, 2, \dots)$$

ein, so ergibt sich, daß $z_1, z_2, \dots, z_n$ linear unabhängig sind und daß zwischen $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$, der Begleitmatrix $\mathfrak{B}^*$ entsprechend, die Gleichung

$$(25) \quad \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \dots + \beta_{n+1} z_{n+1} = 0$$

besteht.

Wir setzen

$$(26) \quad u_i = p_{i1} y_1 + p_{i2} y_2 + \dots + p_{ij} y_j \quad (i = 1, 2, \dots)$$

und

$$(27) \quad U_i = p_{i,j+1} y_{j+1} + p_{i,j+2} y_{j+2} + \dots + p_{in} y_n \quad (i = 1, 2, \dots),$$

also

$$(28) \quad z_i = u_i + U_i \quad (i = 1, 2, \dots)$$

Für $t \leq j$ und $k \geq j+1$ ist, wie man aus der Form der Matrix $\mathfrak{S}$ ersieht, $s_{tk} = 0$. Daher ergibt sich aus (23), daß die bei U_i in (27) auftretenden Größen $p_{i,j+1}, p_{i,j+2}, \dots, p_{in}$ ($i \geq 2$) die Werte annehmen

$$(29) \quad p_{i+1,k} = p'_{ik} - \sum_{t=j+1}^{t=n} p_{it} s_{tk} \quad (i = 1, 2, \dots; k \geq j+1).$$

Aus den Gleichungen (27) und (29) ist ersichtlich, daß $U_1, U_2, \dots$ durch die $l = n - j$ Unbestimmten $y_{j+1}, y_{j+2}, \dots, y_n$ mittels der bei $\mathfrak{S}$ rechts unten stehenden Matrix ebenso definiert sind, wie $z_1, z_2, \dots$ vermöge der Gleichungen (13) und (14) unter α) durch $y_1, y_2, \dots, y_n$ mittels der Matrix $\mathfrak{A}$. Von den Funktionen $U_1, U_2, \dots$ können, da sie nach (27) Linearfunktionen von $y_{j+1}, y_{j+2}, \dots, y_n$ sind, höchstens $l = n - j$ linear unabhängig sein. Seien nun $U_1, U_2, \dots, U_{l'}$ ($l' \leq l$) linear unabhängige Funktionen, während $U_1, U_2, \dots, U_{l'+1}$ in linearer Dependenz stehen. Zwischen ihnen finde die Gleichung

$$(30) \quad \lambda_1^{(1)} U_1 + \lambda_2^{(1)} U_2 + \dots + \lambda_{l'+1}^{(1)} U_{l'+1} = 0$$

statt, bei der infolge der Unabhängigkeit von $U_1, U_2, \dots, U_{l'}$ die Größe $\lambda_{l'+1}^{(1)} \neq 0$ ist.

Wir zeigen zunächst, daß $l' = l$ ist. Nach dem oben unter α) Gesagten ergibt sich aus (30) in analoger Weise, wie die Gleichung (16) aus (15) hergeleitet wurde, eine neue Gleichung der Form

$$(31) \quad \lambda_1^{(2)} U_1 + \lambda_2^{(2)} U_2 + \dots + \lambda_{l'+2}^{(2)} U_{l'+2} = 0;$$

dabei ist, wie man aus dem Vergleich der Faktoren bei (15) und (16) bzw. (30) und (31) ersieht,

$$(32) \quad \lambda_1^{(2)} = \frac{d\lambda_1^{(1)}}{dx}, \quad \lambda_2^{(2)} = \frac{d\lambda_2^{(1)}}{dx} + \lambda_1^{(1)}, \quad \lambda_3^{(2)} = \frac{d\lambda_3^{(1)}}{dx} + \lambda_2^{(1)}, \dots$$

$$\lambda_{l'+1}^{(2)} = \frac{d\lambda_{l'+1}^{(1)}}{dx} + \lambda_{l'}^{(1)}, \quad \lambda_{l'+2}^{(2)} = \lambda_{l'+1}^{(1)}.$$

Da $\lambda_{l'+1}^{(1)} \neq 0$ ist, hat man auch $\lambda_{l'+2}^{(2)} \neq 0$.

Auf Grund der gleichen Überlegung folgt dann aus (31) die weitere Gleichung

$$(3) \quad \lambda_1^{(3)} U_1 + \lambda_2^{(3)} U_2 + \dots + \lambda_{l'+3}^{(3)} U_{l'+3} = 0,$$

obei

$$(4) \quad \lambda_1^{(3)} = \frac{d\lambda_1^{(2)}}{dx}, \quad \lambda_2^{(3)} = \frac{d\lambda_2^{(2)}}{dx} + \lambda_1^{(2)}, \quad \lambda_3^{(3)} = \frac{d\lambda_3^{(2)}}{dx} + \lambda_2^{(2)}, \dots$$

$$\lambda_{l'+2}^{(3)} = \frac{d\lambda_{l'+2}^{(2)}}{dx} + \lambda_{l'+1}^{(2)}, \quad \lambda_{l'+3}^{(3)} = \lambda_{l'+2}^{(2)}.$$

a $\lambda_{l'+3}^{(3)} = \lambda_{l'+2}^{(2)} = \lambda_{l'+1}^{(1)}$ ist und $\lambda_{l'+1}^{(1)}$ nicht verschwindet, hat man $\lambda_{l'+3}^{(3)} \neq 0$.
 uf diese Weise fahren wir fort, aus (33) die folgenden Relationen zu bilden. Da $\lambda_{l'+1}^{(1)} \neq 0$ ist, läßt sich aus (30) $U_{l'+1}$ als lineare homogene Funktion von $U_1, U_2, \dots, U_{l'}$ darstellen. Weiter kann man aus (31), da $\lambda_{l'+2}^{(2)} \neq 0$ ist, $U_{l'+2}$ linear und homogen durch $U_1, U_2, \dots, U_{l'+1}$, also auch durch $U_1, U_2, \dots, U_{l'}$ ausdrücken. Das gleiche gilt nach (33) für $U_{l'+3}$. So geht es weiter. Nun ist nach (28) $z_i = u_i + U_i$ ($i = 1, 2, \dots$); dabei sind die u_i nach Definition lineare homogene Funktionen von $y_1, y_2, \dots, y_j$, während sich die U_i , wie soeben gezeigt, linear und homogen durch $U_1, U_2, \dots, U_{l'}$ ausdrücken lassen. Hieraus folgt, daß von den Funktionen $z_1, z_2, \dots$ höchstens $j + l'$ linear unabhängig sein können. Nun waren die ersten n Funktionen $z_1, z_2, \dots, z_n$ unabhängig; mithin wird $n \leq j + l'$. Da $n = j + l$ ist, erhält man $l \leq l'$. Es war aber $l \geq l'$; folglich wird, wie bewiesen werden sollte, $l = l'$.

Die Funktionen $U_1, U_2, \dots, U_l$ sind demnach linear unabhängig und zwischen $U_1, U_2, \dots, U_{l+1}$ besteht nach (30) eine Relation

$$(30^*) \quad \lambda_1^{(1)} U_1 + \lambda_2^{(1)} U_2 + \dots + \lambda_{l+1}^{(1)} U_{l+1} = 0 \quad (\lambda_{l+1}^{(1)} \neq 0).$$

a die Funktionen $U_1, U_2, \dots$, wie schon gesagt, aus den $l = n - j$ Unbestimmten $y_{j+1}, y_{j+2}, \dots, y_n$ mittels der bei $\S$ rechts unten stehenden Matrix $\|s_{ik}\|$ ($i, k = j + 1, j + 2, \dots, n$) ebenso erhalten werden wie die Funktionen $z_1, z_2, \dots$, unter β) mittels der Matrix $\mathfrak{A}$ aus $y_1, y_2, \dots, y_n$, folgt aus der Relation (30*), daß die Begleitmatrix

$$\left\| \begin{array}{cccccc} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ \frac{\lambda_1^{(1)}}{\lambda_{l+1}^{(1)}} & \frac{\lambda_2^{(1)}}{\lambda_{l+1}^{(1)}} & \frac{\lambda_3^{(1)}}{\lambda_{l+1}^{(1)}} & \dots & \frac{\lambda_l^{(1)}}{\lambda_{l+1}^{(1)}} \end{array} \right\|$$

mit der Matrix $\|s_{ik}\|$ ($i, k = j + 1, j + 2, \dots, n$) von derselben Art ist.

Zur Fortsetzung des Beweises bilden wir mit den gefundenen Größen des Rationalitätsbereiches $\sum$ die Funktionen

$$\begin{aligned} V_1 &= \lambda_1^{(1)} z_1 + \lambda_2^{(1)} z_2 + \dots + \lambda_{l+1}^{(1)} z_{l+1}, \\ (35) \quad V_2 &= \lambda_1^{(2)} z_1 + \lambda_2^{(2)} z_2 + \dots + \lambda_{l+1}^{(2)} z_{l+1} + \lambda_{l+2}^{(2)} z_{l+2}, \\ V_3 &= \lambda_1^{(3)} z_1 + \lambda_2^{(3)} z_2 + \dots + \lambda_{l+1}^{(3)} z_{l+1} + \lambda_{l+2}^{(3)} z_{l+2} + \lambda_{l+3}^{(3)} z_{l+3}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Führt man in (35) nach (28) $z_i = u_i + U_i$ ein ($i = 1, 2, \dots, n$), so erhält man auf Grund von (30), (31), (33) usw.

$$\begin{aligned} V_1 &= \lambda_1^{(1)} u_1 + \lambda_2^{(1)} u_2 + \dots + \lambda_{l+1}^{(1)} u_{l+1}, \\ (36) \quad V_2 &= \lambda_1^{(2)} u_1 + \lambda_2^{(2)} u_2 + \dots + \lambda_{l+1}^{(2)} u_{l+1} + \lambda_{l+2}^{(2)} u_{l+2}, \\ V_3 &= \lambda_1^{(3)} u_1 + \lambda_2^{(3)} u_2 + \dots + \lambda_{l+1}^{(3)} u_{l+1} + \lambda_{l+2}^{(3)} u_{l+2} + \lambda_{l+3}^{(3)} u_{l+3}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Da $u_1, u_2, \dots$ nach (26) lineare homogene Funktionen von $y_1, y_2, \dots, y_n$ sind, können von den Funktionen $V_1, V_2, \dots$ höchstens j linear unabhängig sein. $V_1, V_2, \dots, V_{j'+1}$ ($j' \leq j$) seien in Dependenz, hingegen seien $V_1, V_2, \dots, V_{j'}$ linear unabhängig. Zwischen den abhängigen Funktionen $V_1, V_2, \dots, V_{j'+1}$ möge die Relation

$$(37) \quad \mu_1 V_1 + \mu_2 V_2 + \dots + \mu_{j'+1} V_{j'+1} = 0$$

bestehen, wobei wegen der Unabhängigkeit von $V_1, V_2, \dots, V_{j'}$ notwendig $\mu_{j'+1} \neq 0$ ist. Führt man in (37) für $V_1, V_2, \dots, V_{j'+1}$ ihre Werte nach (35) ein, so erhält man eine Relation zwischen $z_1, z_2, \dots, z_{l+j'+1}$. Dabei ist der Koeffizient von $z_{l+j'+1}$ nach (37) und (35) gleich $\mu_{j'+1} \lambda_{l+j'+1}^{(j'+1)}$, also, da beide Faktoren ungleich Null sind, ebenfalls von Null verschieden. Mithin ergibt sich aus (37) eine wirkliche Relation zwischen $z_1, z_2, \dots, z_{l+j'+1}$. Da $z_1, z_2, \dots, z_n$ linear unabhängig sind und $n = j + l$ ist, kann j' nicht kleiner als j sein. Aus $j' \geq j$ und $j' \leq j$ folgt $j' = j$. Es ist also

$$(37^*) \quad \mu_1 V_1 + \mu_2 V_2 + \dots + \mu_{j+1} V_{j+1} = 0.$$

In der Relation (37^{*}) darf man, da sie mit einer beliebigen Funktion des Rationalitätsbereiches multipliziert werden kann, μ_{j+1} einen beliebigen vorgeschriebenen Wert beilegen. Mit Rücksicht auf das Folgende sei μ_{j+1} so gewählt, daß

$$(38) \quad \mu_{j+1} = \frac{\beta_{n+1}}{\lambda_{l+1}^{(1)}}$$

ist.

Wir ersetzen nunmehr die n linear unabhängigen Funktionen $z_1, z_2, \dots, z_n$

urch $z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}$. Dann geht V_1 , wie die erste Gleichung von (35) ergibt, über in

$$\lambda_1^{(1)} z + \lambda_2^{(1)} \frac{dz}{dx} + \dots + \lambda_{l+1}^{(1)} \frac{d^l z}{dx^l}.$$

en eben hingeschriebenen Differentialausdruck wollen wir mit S_2 bezeichnen, also setzen

$$S_2 \equiv \lambda_1^{(1)} z + \lambda_2^{(1)} \frac{dz}{dx} + \dots + \lambda_{l+1}^{(1)} \frac{d^l z}{dx^l}.$$

on der Begleitmatrix dieses Differentialausdruckes S_2 ist bereits nachgewiesen worden, daß sie mit der bei $\mathfrak{S}$ rechts unten stehenden Matrix $s_{ik} ||$ ($i, k = j+1, j+2, \dots, n$) von derselben Art ist.

Wir ersetzen auch in den Gleichungen (15) und (16) unter α) auf Seite 12 die Funktionen $z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_e}, z_{i_e+1}$ durch

$$\frac{d^{i_1-1}z}{dx^{i_1-1}}, \frac{d^{i_2-1}z}{dx^{i_2-1}}, \dots, \frac{d^{i_e-1}z}{dx^{i_e-1}}, \frac{d^{i_e}z}{dx^{i_e}}$$

und sehen hierbei, daß die linke Seite der Gleichung (16) die Abgeleitete der linken Seite der Gleichung (15) ist. Nun sind die aufeinanderfolgenden Gleichungen (35) auseinander entsprechend abgeleitet wie (16) aus (15).

Hieraus folgt, daß, wenn man für $z_1, z_2, \dots, z_n$ die Funktionen $z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}$ einführt, $V_2, V_3, \dots, V_j$ übergehen in $\frac{dS_2}{dx}, \frac{d^2S_2}{dx^2}, \dots, \frac{d^{j-1}S_2}{dx^{j-1}}$.

Für V_{j+1} , bei dem, wenn man es nach (36) hinschreibt, rechterhand auch noch z_{n+1} mit dem Faktor $\lambda_{n+1}^{(j+1)} = \lambda_{l+1}^{(1)}$ auftritt, während $\frac{d^n z}{dx^n}$ fehlt, ist

etwas anders zu schreiben, nämlich $\frac{d^j S_2}{dx^j} + \lambda_{l+1}^{(1)} \left(z_{n+1}^0 - \frac{d^n z}{dx^n} \right)$. Dabei ist

z_{n+1}^0 der Wert von z_{n+1} , der der Spezialisierung von $z_1, z_2, \dots, z_n$ in

$\frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}$ entspricht. Nach (25) findet man:

$$z_{n+1}^0 = -\frac{1}{\beta_{n+1}} \left(\beta_1 z + \beta_2 \frac{dz}{dx} + \dots + \beta_n \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} \right).$$

mithin geht V_{j+1} über in

$$\frac{d^j S_2}{dx^j} - \frac{\lambda_{l+1}^{(1)}}{\beta_{n+1}} \left(\beta_1 z + \beta_2 \frac{dz}{dx} + \dots + \beta_n \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \beta_{n+1} \frac{d^n z}{dx^n} \right).$$

folglich tritt für die Relation (37*) $\mu_1 V_1 + \mu_2 V_2 + \dots + \mu_{j+1} V_{j+1} = 0$ die neue

$$\mu_1 S_2 + \mu_2 \frac{dS_2}{dx} + \dots + \mu_j \frac{d^{j-1}S_2}{dx^{j-1}} + \mu_{j+1} \frac{d^j S_2}{dx^j} - \\ - \frac{\mu_{j+1} \cdot \lambda_{l+1}^{(1)}}{\beta_{n+1}} \left(\beta_1 z + \beta_2 \frac{dz}{dx} + \dots + \beta_{n+1} \frac{d^n z}{dx^n} \right) = 0.$$

Da nach (38) $\mu_{j+1} = \frac{\beta_{n+1}}{\lambda_{l+1}^{(1)}}$ gewählt werden sollte, erhält man schließlich für den Differentialausdruck

$$B \equiv \beta_1 z + \beta_2 \frac{dz}{dx} + \dots + \beta_{n+1} \frac{d^n z}{dx^n}$$

die Darstellung

$$(40) \quad B = \mu_1 S_2 + \mu_2 \frac{dS_2}{dx} + \dots + \mu_{j+1} \frac{d^j S_2}{dx^j}.$$

Bezeichnet man mit S_1 den Differentialausdruck j -ter Ordnung, setzt also

$$(41) \quad S_1 \equiv \mu_1 z + \mu_2 \frac{dz}{dx} + \dots + \mu_{j+1} \frac{d^j z}{dx^j},$$

so ist zunächst nachgewiesen, daß sich der Differentialausdruck B darstellen läßt als das symbolische Produkt

$$(42) \quad B = S_1 S_2.$$

Wir haben noch weiter zu zeigen, daß die Begleitmatrix $\mathfrak{S}_1^*$ des Differentialausdruckes S_1

$$\mathfrak{S}_1^*: \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ \frac{\mu_1}{\mu_{j+1}} & \frac{\mu_2}{\mu_{j+1}} & \frac{\mu_3}{\mu_{j+1}} & \dots & \frac{\mu_j}{\mu_{j+1}} \end{array} \right\|$$

von derselben Art ist mit der bei $\mathfrak{S}^*$ links oben stehenden Matrix $\|s_{ik}\|$ ($i, k = 1, 2, \dots, j$).

Zum Beweise betrachten wir das zu $\mathfrak{S}_1^*$ zugehörige Differentialsystem

$$(43) \quad \frac{dV_1}{dx} - V_2, \frac{dV_2}{dx} - V_3, \dots, \frac{dV_{j-1}}{dx} - V_j, \frac{dV_j}{dx} + \frac{\mu_1}{\mu_{j+1}} V_1 + \frac{\mu_2}{\mu_{j+1}} V_2 + \dots + \frac{\mu_j}{\mu_{j+1}} V_j$$

wobei $V_1, V_2, \dots, V_j$ die durch (35) eingeführten linear unabhängigen Funktionen bedeuten. Dann wird nach (35)

$$\frac{dV_1}{dx} = \frac{d\lambda_1^{(1)}}{dx} z_1 + \lambda_1^{(1)} \frac{dz_1}{dx} + \frac{d\lambda_2^{(1)}}{dx} z_2 + \lambda_2^{(1)} \frac{dz_2}{dx} + \dots + \frac{d\lambda_{l+1}^{(1)}}{dx} z_{l+1} + \lambda_{l+1}^{(1)} \frac{dz_{l+1}}{dx}$$

und weiter ebenfalls nach (35), wenn man für $\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}, \dots, \lambda_{l+2}^{(2)}$ ihre Werte nach (32) einführt,

$$z_1 + \left(\frac{d\lambda_2^{(1)}}{dx} + \lambda_1^{(1)} \right) z_2 + \left(\frac{d\lambda_3^{(1)}}{dx} + \lambda_2^{(1)} \right) z_3 + \dots + \left(\frac{d\lambda_{l+1}^{(1)}}{dx} + \lambda_l^{(1)} \right) z_{l+1} + \lambda_{l+1}^{(1)} z_{l+2}.$$

mithin wird

$$(44) \quad \frac{dV_1}{dx} - V_2 = \lambda_1^{(1)} \left(\frac{dz_1}{dx} - z_2 \right) + \lambda_2^{(1)} \left(\frac{dz_2}{dx} - z_3 \right) + \dots + \lambda_{l+1}^{(1)} \left(\frac{dz_{l+1}}{dx} - z_{l+2} \right).$$

entsprechend findet man

$$\frac{dV_2}{dx} - V_3 = \lambda_1^{(2)} \left(\frac{dz_1}{dx} - z_2 \right) + \lambda_2^{(2)} \left(\frac{dz_2}{dx} - z_3 \right) + \dots + \lambda_{l+2}^{(2)} \left(\frac{dz_{l+2}}{dx} - z_{l+3} \right),$$

$$\frac{dV_3}{dx} - V_4 = \lambda_1^{(3)} \left(\frac{dz_1}{dx} - z_2 \right) + \lambda_2^{(3)} \left(\frac{dz_2}{dx} - z_3 \right) + \dots + \lambda_{l+3}^{(3)} \left(\frac{dz_{l+3}}{dx} - z_{l+4} \right),$$

...

$$\frac{dV_{j-1}}{dx} - V_j = \lambda_1^{(j-1)} \left(\frac{dz_1}{dx} - z_2 \right) + \lambda_2^{(j-1)} \left(\frac{dz_2}{dx} - z_3 \right) + \dots + \lambda_{l+j-1}^{(j-1)} \left(\frac{dz_{l+j-1}}{dx} - z_n \right),$$

$$\frac{dV_j}{dx} - V_{j+1} = \lambda_1^{(j)} \left(\frac{dz_1}{dx} - z_2 \right) + \lambda_2^{(j)} \left(\frac{dz_2}{dx} - z_3 \right) + \dots + \lambda_n^{(j)} \left(\frac{dz_n}{dx} - z_{n+1} \right).$$

Infolge der Relation (37*) läßt sich die letzte der Gleichungen (45) schreiben

$$\frac{dV_j}{dx} + \frac{\mu_1}{\mu_{j+1}} V_1 + \frac{\mu_2}{\mu_{j+1}} V_2 + \dots + \frac{\mu_j}{\mu_{j+1}} V_j = \lambda_1^{(j)} \left(\frac{dz_1}{dx} - z_2 \right) + \lambda_2^{(j)} \left(\frac{dz_2}{dx} - z_3 \right) + \dots + \lambda_n^{(j)} \left(\frac{dz_n}{dx} - z_{n+1} \right).$$

Wir haben mithin die Bestandteile des Differentialsystems (43) als lineare homogene Funktionen von $\frac{dz_1}{dx} - z_2, \frac{dz_2}{dx} - z_3, \dots, \frac{dz_n}{dx} - z_{n+1}$ ausgedrückt. Nach (24) war

$$z_i = p_{i1} y_1 + p_{i2} y_2 + \dots + p_{in} y_n \quad (i = 1, 2, \dots, n+1).$$

Folglich wird

$$\frac{dz_i}{dx} = p_{i1} \frac{dy_1}{dx} + p_{i2} \frac{dy_2}{dx} + \dots + p_{in} \frac{dy_n}{dx} + y_1 \frac{dp_{i1}}{dx} + y_2 \frac{dp_{i2}}{dx} + \dots + y_n \frac{dp_{in}}{dx}.$$

Da nach (23) $p_{i+1,k} = p'_{ik} - \sum_{t=1}^{t=n} p_{it} s_{tk}$ ist, erhält man aus (24) für

den Wert

$$z_{i+1} = \left(\frac{dp_{i1}}{dx} - \sum_{t=1}^{t=n} p_{it} s_{t1} \right) y_1 + \left(\frac{dp_{i2}}{dx} - \sum_{t=1}^{t=n} p_{it} s_{t2} \right) y_2 + \dots$$

$$+ \left(\frac{dp_{in}}{dx} - \sum_{t=1}^{t=n} p_{it} s_{tn} \right) y_n.$$

Mithin ergibt sich aus (46) und (47)

$$(48) \quad \frac{dz_i}{dx} - z_{i+1} = p_{i1} \left(\frac{dy_1}{dx} + s_{11}y_1 + s_{12}y_2 + \dots + s_{1n}y_n \right) + p_{i2} \left(\frac{dy_2}{dx} + s_{21}y_1 + s_{22}y_2 + \dots + s_{2n}y_n \right) + \dots + p_{in} \left(\frac{dy_n}{dx} + s_{n1}y_1 + s_{n2}y_2 + \dots + s_{nn}y_n \right)$$

oder, da s_{ik} für $i \leq j$ und $k \geq j+1$ den Wert Null hat,

$$(49) \quad \frac{dz_i}{dx} - z_{i+1} = p_{i1} \left(\frac{dy_1}{dx} + s_{11}y_1 + \dots + s_{1j}y_j \right) + p_{i2} \left(\frac{dy_2}{dx} + s_{21}y_1 + \dots + s_{2j}y_j \right) + \dots + p_{ij} \left(\frac{dy_j}{dx} + s_{j1}y_1 + \dots + s_{jj}y_j \right) + p_{i,j+1} \left(\frac{dy_{j+1}}{dx} + s_{j+1,1}y_1 + \dots + s_{j+1,n}y_n \right) + \dots + p_{in} \left(\frac{dy_n}{dx} + s_{n1}y_1 + \dots + s_{nn}y_n \right).$$

Die Bestandteile des Differentialsystems (43) hängen linear und homogen von $\frac{dy_i}{dx} - z_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ab. Mithin ergibt sich aus (49), daß sich auch aus

$$\begin{aligned} & \frac{dy_1}{dx} + s_{11}y_1 + s_{12}y_2 + \dots + s_{1j}y_j, \quad \frac{dy_2}{dx} + s_{21}y_1 + s_{22}y_2 + \dots + s_{2j}y_j, \dots, \\ & \frac{dy_j}{dx} + s_{j1}y_1 + s_{j2}y_2 + \dots + s_{jj}y_j, \quad \frac{dy_{j+1}}{dx} + s_{j+1,1}y_1 + \dots + s_{j+1,n}y_n, \dots, \\ & \frac{dy_n}{dx} + s_{n1}y_1 + s_{n2}y_2 + \dots + s_{nn}y_n \end{aligned}$$

linear und homogen komponieren lassen. Es bestehen also Gleichungen der Form

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{dV_i}{dx} - V_{i+1} = q_{i1} \left(\frac{dy_1}{dx} + s_{11}y_1 + \dots + s_{1j}y_j \right) + q_{i2} \left(\frac{dy_2}{dx} + s_{21}y_1 + \dots + s_{2j}y_j \right) \\ & \quad + \dots + q_{ij} \left(\frac{dy_j}{dx} + s_{j1}y_1 + \dots + s_{jj}y_j \right) \\ & \quad + q_{i,j+1} \left(\frac{dy_{j+1}}{dx} + s_{j+1,1}y_1 + \dots + s_{j+1,n}y_n \right) + \dots \\ & \quad + q_{in} \left(\frac{dy_n}{dx} + s_{n1}y_1 + \dots + s_{nn}y_n \right) \quad (i = 1, 2, \dots, j-1), \\ & \frac{dV_j}{dx} + \frac{\mu_1}{\mu_{j+1}} V_1 + \frac{\mu_2}{\mu_{j+1}} V_2 + \dots + \frac{\mu_j}{\mu_{j+1}} V_j = q_{j1} \left(\frac{dy_1}{dx} + s_{11}y_1 + \dots + s_{1j}y_j \right) \\ & \quad + q_{j2} \left(\frac{dy_2}{dx} + s_{21}y_1 + s_{22}y_2 + \dots + s_{2j}y_j \right) + \dots \\ & \quad + q_{jj} \left(\frac{dy_j}{dx} + s_{j1}y_1 + s_{j2}y_2 + \dots + s_{jj}y_j \right) \\ & \quad + q_{j,j+1} \left(\frac{dy_{j+1}}{dx} + s_{j+1,1}y_1 + \dots + s_{j+1,n}y_n \right) \\ & \quad + \dots + q_{jn} \left(\frac{dy_n}{dx} + s_{n1}y_1 + \dots + s_{nn}y_n \right). \end{aligned} \right.$$

Im Anschluß an die Gleichungen (36) war schon oben bemerkt worden, daß $V_1, V_2, \dots, V_j$ lineare homogene Funktionen von $y_1, y_2, \dots, y_j$ sind; so bestehen Relationen der Form:

$$\begin{aligned} V_1 &= r_{11} y_1 + r_{12} y_2 + \dots + r_{1j} y_j, \\ V_2 &= r_{21} y_1 + r_{22} y_2 + \dots + r_{2j} y_j, \\ &\vdots \\ V_j &= r_{j1} y_1 + r_{j2} y_2 + \dots + r_{jj} y_j. \end{aligned}$$

Führt man diese Werte in das Differentialsystem (43) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} (52) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dV_i}{dx} - V_{i+1} &= r_{i1} \frac{dy_1}{dx} + r_{i2} \frac{dy_2}{dx} + \dots + r_{ij} \frac{dy_j}{dx} + y_1 \left(\frac{dr_{i1}}{dx} - r_{i+1,1} \right) \\ &\quad + y_2 \left(\frac{dr_{i2}}{dx} - r_{i+1,2} \right) + \dots + y_j \left(\frac{dr_{ij}}{dx} - r_{i+1,j} \right) \\ &\quad (i=1, 2, \dots, j-1) \\ \frac{dV_j}{dx} + \frac{\mu_1}{\mu_{j+1}} V_1 + \frac{\mu_2}{\mu_{j+1}} V_2 + \dots + \frac{\mu_j}{\mu_{j+1}} V_j &= r_{j1} \frac{dy_1}{dx} + r_{j2} \frac{dy_2}{dx} + \dots \\ &\quad + r_{jj} \frac{dy_j}{dx} + \sum_{i=1}^{i=j} \frac{\mu_i}{\mu_{j+1}} r_{i1} y_1 + \sum_{i=1}^{i=j} \frac{\mu_i}{\mu_{j+1}} r_{i2} y_2 + \dots + \sum_{i=1}^{i=j} \frac{\mu_i}{\mu_{j+1}} r_{ij} y_i. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Infolge der Identität der linken Seiten von (50) und (52) stimmen die rechten überein. Beachten wir dies und wählen die Unbestimmten $y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_n$ Null, hingegen $y_k = 1$, so ergibt sich, daß in den Gleichungen (50) und (52) die Faktoren von y_k übereinstimmen. Macht man hiervon Gebrauch, so reduzieren sich die rechten Seiten von (50) und (52) auf die j Gleichungen

$$\begin{aligned} q_{i1} \frac{dy_1}{dx} + q_{i2} \frac{dy_2}{dx} + \dots + q_{ij} \frac{dy_j}{dx} + q_{i,j+1} \frac{dy_{j+1}}{dx} + \dots + q_{in} \frac{dy_n}{dx} \\ = r_{i1} \frac{dy_1}{dx} + r_{i2} \frac{dy_2}{dx} + \dots + r_{ij} \frac{dy_j}{dx} \quad (i=1, 2, \dots, j). \end{aligned}$$

Wählt man in diesen Gleichungen die Unbestimmten $y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_n$ Null, hingegen $y_k = x$, so erhält man schließlich $r_{ik} = r_{ik}$ ($i, k=1, 2, \dots, j$), $q_{ik} = 0$ für $i=1, 2, \dots, j$ und $k \geq j+1$.

Wir führen nun vier spezielle Matrizen ein (V), $\left(\frac{dV}{dx}\right)$, (y) , $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, wobei

$$(V) = \left\| \begin{array}{cccc} V_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ V_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_j & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\|$$

und $\left(\frac{dV}{dx}\right)$, (y) und $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ in entsprechender Weise aus $\frac{dV_1}{dx}, \frac{dV_2}{dx}, \dots, \frac{dV_j}{dx}$

bzw. $y_1, y_2, \dots, y_j$ bzw. $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \dots, \frac{dy_j}{dx}$ gebildet sind. Bezeichnet man noch die Matrix $\|r_{ik}\|$ ($i, k=1, 2, \dots, j$) mit $\mathfrak{R}$, so schreiben sich die Gleichungen (51) symbolisch

$$(53) \quad (V) = \mathfrak{R}(y).$$

Beachtet man die für q_{ik} gefundenen Werte, so gehen die Gleichungen (50) über in

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dV_i}{dx} - V_{i+1} = r_{i1} \left(\frac{dy_1}{dx} + s_{11}y_1 + s_{12}y_2 + \dots + s_{1j}y_j \right) + r_{i2} \left(\frac{dy_2}{dx} + s_{21}y_1 + \dots \right. \\ \quad \left. + \dots + r_{ij} \left(\frac{dy_j}{dx} + s_{j1}y_1 + s_{j2}y_2 + \dots + s_{jj}y_j \right) \right) \quad (i=1, 2, \dots, j) \\ \frac{dV_j}{dx} + \frac{\mu_1}{\mu_{j+1}}V_1 + \frac{\mu_2}{\mu_{j+1}}V_2 + \dots + \frac{\mu_j}{\mu_{j+1}}V_j = r_{j1} \left(\frac{dy_1}{dx} + s_{11}y_1 + s_{12}y_2 + \dots \right. \\ \quad \left. + r_{j2} \left(\frac{dy_2}{dx} + s_{21}y_1 + \dots + s_{2j}y_j \right) + \dots + r_{jj} \left(\frac{dy_j}{dx} + s_{j1}y_1 + \dots + s_{jj}y_j \right) \right) \end{array} \right.$$

Erinnern wir uns der Definition auf Seite 19 für die Begleitmatrix $\mathfrak{S}_1^*$ und bezeichnen die Matrix

$$\|s_{ik}\| \quad (i, k=1, 2, \dots, j)$$

mit $\mathfrak{S}_{11}$, so können wir das Gleichungssystem (54) symbolisch in Matrizenform schreiben

$$(55) \quad \left(\frac{dV}{dx} \right) + \mathfrak{S}_1^*(V) = \mathfrak{R} \left(\left(\frac{dy}{dx} \right) + \mathfrak{S}_{11}(y) \right).$$

Aus (53) folgt durch Differentiation

$$(56) \quad \left(\frac{dV}{dx} \right) = \mathfrak{R} \left(\frac{dy}{dx} \right) + \mathfrak{R}'(y),$$

wobei $\mathfrak{R}'$ diejenige Matrix ist, die aus $\mathfrak{R}$ dadurch entsteht, daß man die Elemente r_{ik} durch $\frac{dr_{ik}}{dx}$ ersetzt. Aus den Gleichungen (55), (56) und (53) ergibt sich

$$\mathfrak{R} \left(\frac{dy}{dx} \right) + \mathfrak{R}'(y) + \mathfrak{S}_1^* \mathfrak{R}(y) = \mathfrak{R} \left(\frac{dy}{dx} \right) + \mathfrak{R} \mathfrak{S}_{11}(y).$$

oder

$$(57) \quad \mathfrak{S}_1^* \mathfrak{R}(y) = -\mathfrak{R}'(y) + \mathfrak{R} \mathfrak{S}_{11}(y).$$

Aus einer Matrizengleichung $\mathfrak{P}(y) = \mathfrak{Q}(y)$ zwischen zwei beliebigen Matrizen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ folgt, worauf schon oben einmal hingewiesen wurde, wegen der Unabhängigkeit der Unbestimmten y die Übereinstimmung der Matrizen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$. Mithin erhält man aus (57) die Gleichung

$$(58) \quad \mathfrak{S}_1^* \mathfrak{R} = -\mathfrak{R}' + \mathfrak{R} \mathfrak{S}_{11}.$$

Da $V_1, V_2, \dots, V_j$ linear unabhängige Funktionen sind, folgt aus

51), daß die Determinante der Matrix $\mathfrak{R}$ nicht verschwindet. Mithin besagt die Relation (58), daß die Begleitmatrix $\mathfrak{S}_1^*$ und die Matrix $\|s_{ik}\|$, $k = 1, 2, \dots, j$), wie gezeigt werden sollte, gegenseitig von derselben Art sind. Hiermit ist Satz II völlig bewiesen.

§ 3.

Der Hauptsatz über die Begleitmatrix eines linearen homogenen Differentialausdruckes, der als Produkt von k Differentialausdrücken darstellbar ist. Normalform der Begleitmatrix.

Durch wiederholte Anwendung der Sätze I und II erhält man den folgenden, die Theoreme I und II zusammenfassenden

Hauptsatz I: *Ein Differentialausdruck B von der Ordnung n läßt sich dann und nur dann als symbolisches Produkt in der Form $B = B_1 B_2 \dots B_k$ darstellen, wobei $B_1, B_2, \dots, B_k$ lineare homogene Differentialausdrücke der Ordnungen $n_1, n_2, \dots, n_k$ bedeuten, wenn die Begleitmatrix $\mathfrak{B}^*$ des Differentialausdruckes B von derselben Art ist mit einer reduzierten Matrix der Form*

$$\mathfrak{B}: \left\| \begin{array}{cccccc} \mathfrak{B}_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mathfrak{B}_{21} & \mathfrak{B}_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mathfrak{B}_{31} & \mathfrak{B}_{32} & \mathfrak{B}_{33} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ \mathfrak{B}_{k-1,1} & \mathfrak{B}_{k-1,2} & \mathfrak{B}_{k-1,3} & \dots & \mathfrak{B}_{k-1,k-1} & 0 \\ \mathfrak{B}_{k1} & \mathfrak{B}_{k2} & \mathfrak{B}_{k3} & \dots & \mathfrak{B}_{kk-1} & \mathfrak{B}_{kk} \end{array} \right\|;$$

wobei bedeuten $\mathfrak{B}_{11}, \mathfrak{B}_{22}, \dots, \mathfrak{B}_{kk}$ Matrizen der Grade $n_1, n_2, \dots, n_k$, und es ist $\mathfrak{B}_{11}$ mit der Begleitmatrix des Differentialausdruckes B_1 , $\mathfrak{B}_{22}$ mit derjenigen von B_2 usw. schließlich $\mathfrak{B}_{kk}$ mit derjenigen von B_k von derselben Art.

Durch wiederholte Anwendung von Satz I im § 1 kann man auch noch eine Normalform für die Matrix erzielen, in die sich die Begleitmatrix $\mathfrak{B}^*$ eines linearen homogenen Differentialausdruckes B transformieren läßt.

Ist $B = B_1 B_2 \dots B_k$ und lauten die Differentialausdrücke

$$B_i = b_1^{(i)} z + b_2^{(i)} \frac{dz}{dx} + \dots + b_{n_i+1}^{(i)} \frac{d^{n_i} z}{dx^{n_i}} \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

so kann man die Begleitmatrix $\mathfrak{B}^*$ von B stets in die Normalform transformieren

$$\mathfrak{B}: \left\| \begin{array}{ccccccc} \mathfrak{B}_{11}^* & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mathfrak{B}_{21}^* & \mathfrak{B}_{22}^* & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{B}_{32}^* & \mathfrak{B}_{33}^* & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{B}_{43}^* & \mathfrak{B}_{44}^* & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathfrak{B}_{kk-1}^* & \mathfrak{B}_{kk}^* \end{array} \right\|,$$

dabei ist $\mathfrak{B}_{ii}^*$ ($i=1, 2, \dots, k$) die Begleitmatrix des linearen homogenen Differentialausdruckes B_i , also

$$\mathfrak{B}_{ii}^*: \left\| \begin{array}{cccc} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ \frac{b_1^{(i)}}{b_{n_i+1}^{(i)}} & \frac{b_2^{(i)}}{b_{n_i+1}^{(i)}} & \frac{b_3^{(i)}}{b_{n_i+1}^{(i)}} & \dots & \frac{b_{n_i}^{(i)}}{b_{n_i+1}^{(i)}} \end{array} \right\| \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

und $\mathfrak{B}_{ii-1}^*$ hat die Form

$$\mathfrak{B}_{ii-1}^*: \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{b_{n_i+1}^{(i)}} & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\| \quad (i=2, 3, \dots, k).$$

Beim Beweise wird es genügen, sich auf den Fall $k=3$ zu beschränken ($n_1 + n_2 + n_3 = n$), also $B = B_1 B_2 B_3$ anzunehmen. Wir setzen $G = B_1 B_2$, also $B = G B_3$. Das zu der Begleitmatrix $\mathfrak{B}^*$ von B zugehörige Differentialsystem

$$\frac{dz_1}{dx} = z_2, \quad \frac{dz_2}{dx} = z_3, \quad \dots, \quad \frac{dz_n}{dx} + \frac{\beta_1}{\beta_{n+1}} z_1 + \frac{\beta_2}{\beta_{n+1}} z_2 + \dots + \frac{\beta_n}{\beta_{n+1}} z_n$$

wird zuerst entsprechend den Gleichungen (5) und (6) des § 1 durch Einführung der neuen Funktionen $y_1, y_2, \dots, y_n$, die man definiert:

$$y_1 = b_1^{(3)} z_1 + b_2^{(3)} z_2 + \dots + b_{n_3+1}^{(3)} z_{n_3+1},$$

$$y_2 = \frac{db_1^{(3)}}{dx} z_1 + \left(\frac{db_2^{(3)}}{dx} + b_1^{(3)} \right) z_2 + \dots + \left(\frac{db_{n_3}^{(3)}}{dx} + b_{n_3-1}^{(3)} \right) z_{n_3} + \left(\frac{db_{n_3+1}^{(3)}}{dx} + b_{n_3}^{(3)} \right) z_{n_3+1} + b_{n_3+2}^{(3)} z_{n_3+2}$$

usw. bis $y_{n_1+n_2}$ und weiter

$$y_{n_1+n_2+1} = z_1, \quad y_{n_1+n_2+2} = z_2, \quad \dots, \quad y_{n_1+n_2+n_3} = z_{n_3},$$

transformiert in das Differentialsystem (vgl. die Gleichungen (9) auf Seite 8):

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = y_3, \dots, \frac{dy_{n_1+n_2-1}}{dx} = y_{n_1+n_2}, \\ \frac{dy_{n_1+n_2}}{dx} &+ \frac{g_1}{g_{j-1}} y_1 + \frac{g_2}{g_{j+1}} y_2 + \dots + \frac{g_j}{g_{j+1}} y_{n_1+n_2} \quad (j = n_1 + n_2), \\ \frac{dy_{n_1+n_2+1}}{dx} &= y_{n_1+n_2+2}, \quad \frac{dy_{n_1+n_2+2}}{dx} = y_{n_1+n_2+3}, \dots, \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n, \\ \frac{dy_n}{dx} &= \frac{g_1}{b_{n_3+1}^{(3)}} + \frac{b_1^{(3)}}{b_{n_3+1}^{(3)}} y_{n_1+n_2+1} + \frac{b_2^{(3)}}{b_{n_3+1}^{(3)}} y_{n_1+n_2+2} + \dots + \frac{b_{n_3}^{(3)}}{b_{n_3+1}^{(3)}} y_n. \end{aligned}$$

Dann behandle man die Funktionen $y_1, y_2, \dots, y_{n_1+n_2}$, der Zerlegung $G = B_1 B_2$ entsprechend, ebenso wie es mit $z_1, z_2, \dots, z_n$ in bezug auf die Zerlegung $B = G B_3$ geschah. Man setze also

$$Y_1 = b_1^{(2)} y_1 + b_2^{(2)} y_2 + \dots + b_{n_2+1}^{(2)} y_{n_2+1},$$

$$Y_2 = \frac{db_1^{(2)}}{dx} y_1 + \left(\frac{db_2^{(2)}}{dx} + b_1^{(2)} \right) y_2 + \dots + \left(\frac{db_{n_2+1}^{(2)}}{dx} + b_{n_2}^{(2)} \right) y_{n_2+1} + b_{n_2+1}^{(2)} y_{n_2+2},$$

usw. bis Y_{n_1} , hierauf

$$Y_{n_1+1} = y_1, \quad Y_{n_1+2} = y_2, \quad \dots, \quad Y_{n_1+n_2} = y_{n_2}.$$

Hierdurch geht unser Differentialsystem über in

$$\begin{aligned} \frac{dY_1}{dx} &= Y_2, \quad \frac{dY_2}{dx} = Y_3, \dots, \quad \frac{dY_{n_1-1}}{dx} = Y_{n_1}, \\ \frac{dY_{n_1}}{dx} &+ \frac{b_1^{(1)}}{b_{n_1+1}^{(1)}} Y_1 + \frac{b_2^{(1)}}{b_{n_1+1}^{(1)}} Y_2 + \dots + \frac{b_{n_1}^{(1)}}{b_{n_1+1}^{(1)}} Y_{n_1}, \\ \frac{dY_{n_1+1}}{dx} &= Y_{n_1+2}, \quad \frac{dY_{n_1+2}}{dx} = Y_{n_1+3}, \dots, \quad \frac{dY_{n_1+n_2-1}}{dx} = Y_{n_1+n_2}, \\ \frac{dY_{n_1+n_2}}{dx} &= \frac{Y_1}{b_{n_2+1}^{(2)}} + \frac{b_1^{(2)}}{b_{n_2+1}^{(2)}} Y_{n_1+1} + \frac{b_2^{(2)}}{b_{n_2+1}^{(2)}} Y_{n_1+2} + \dots + \frac{b_{n_2}^{(2)}}{b_{n_2+1}^{(2)}} Y_{n_1+n_2}, \\ \frac{dy_{n_1+n_2+1}}{dx} &= y_{n_1+n_2+2}, \quad \frac{dy_{n_1+n_2+2}}{dx} = y_{n_1+n_2+3}, \dots, \quad \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n, \\ \frac{dy_n}{dx} &= \frac{Y_{n_1+1}}{b_{n_3+1}^{(3)}} + \frac{b_1^{(3)}}{b_{n_3+1}^{(3)}} y_{n_1+n_2+1} + \frac{b_2^{(3)}}{b_{n_3+1}^{(3)}} y_{n_1+n_2+2} + \dots + \frac{b_{n_3}^{(3)}}{b_{n_3+1}^{(3)}} y_n. \end{aligned}$$

Dies ist dasjenige Differentialsystem, das zu der Matrix

$$\mathfrak{N}: \left\| \begin{array}{cccc} \mathfrak{B}_{11}^* & 0 & 0 & \\ \mathfrak{B}_{21}^* & \mathfrak{B}_{22}^* & 0 & \\ 0 & \mathfrak{B}_{32}^* & \mathfrak{B}_{33}^* & \end{array} \right\|$$

gehört.

Der gegebene Beweis enthält auch eine *Methode*, um die Überführung der Begleitmatrix $\mathfrak{B}^*$ eines linearen homogenen Differentialausdruckes $B = B_1 B_2 \dots B_k$ in die Normalform $\mathfrak{N}$ wirklich durchzuführen, ohne daß hierbei der Rationalitätsbereich $\sum$ verlassen wird.

An die oben erhaltene Darstellung in der Normalform $\mathfrak{N}$ knüpfe wir noch die folgende wesentliche Bemerkung: *Ist der Differentialausdruck B darstellbar in der Form $B = B_1 B_2 \dots B_k$, so kann man hieraus stets eine Zerlegung $B = C_1 C_2 \dots C_k$ finden, bei der $C_1, C_2, \dots, C_k$ die gleichen Ordnungen wie $B_1, B_2, \dots, B_k$ besitzen und die Koeffizienten der höchsten Ableitungen bei $C_2, C_3, \dots, C_k$ gleich 1 sind. Bei einer solchen Wahl kann man für die Transformation der Begleitmatrix von B eine derartige Normalform $\mathfrak{N}$ erzielen, daß in der Matrix $\mathfrak{B}_{i,i-1}^*$ ($i = 2, 3, \dots, k$) die Größe $\frac{-1}{b_{i,i-1}^{(i)}}$ den Wert -1 annimmt und daß $\mathfrak{B}_{i,i-1}^*$ die Begleitmatrix des Differentialausdruckes C_i wird.*

Für unsere Aussage ist nur der Nachweis erforderlich, daß aus der Zerlegung $B = B_1 B_2 \dots B_k$ die gewünschte $B = C_1 C_2 \dots C_k$ abgeleitet werden kann. Zum Beweise setze man $B_k = f_k \cdot C_k$, wobei die Differentialausdrücke B_k und C_k sich nur um den Faktor f_k unterscheiden, der eine bloße Funktion der unabhängigen Variablen x ist, und die höchste Ableitung bei C_k den Koeffizienten 1 besitzt. Dann führe man in $B_{k-1} B_k = B_{k-1} (f_k C_k)$ den durch das Symbol B_{k-1} bezeichneten Differentiationsprozeß aus und ordne nach Ableitungen von C_k . Auf diese Art erhält man eine Relation $B_{k-1} (f_k C_k) = \bar{B}_{k-1} C_k$, also $B = B_1 B_2 \dots B_{k-2} \bar{B}_{k-1} C_k$; dabei hat der Differentialausdruck $\bar{B}_{k-1}$ offenbar dieselbe Ordnung wie B_{k-1} . Nun setze man $\bar{B}_{k-1} = f_{k-1} C_{k-1}$, wobei f_{k-1} ebenso wie f_k nur eine Funktion von x ist und die höchste Abgeleitete bei dem Differentialausdrucke C_{k-1} den Koeffizienten 1 besitzt. Hierauf führe man in $B_{k-2} (f_{k-1} C_{k-1})$ den durch B_{k-2} angegebenen Differentiationsprozeß aus, der auf die Relation $B_{k-2} (f_{k-1} C_{k-1}) = \bar{B}_{k-2} C_{k-1}$ führt. So fahre man mit $B_1 B_2 \dots B_{k-3} \bar{B}_{k-2} C_{k-1} C_k$ fort.

§ 4.

Die Begleitmatrix eines linearen homogenen Differentialausdruckes, der hinteres kleinstes gemeinsames Vielfaches von zwei hinten teilerfremden Differentialausdrücken ist, läßt sich als zerfallende Matrix darstellen.

Handelte der Satz I des § 1 von bloßer Produktdarstellung des linearen homogenen Differentialausdruckes B , so soll nunmehr weitergehend B kleinstes gemeinsames Vielfaches zweier linearer homogener Differential-

ausdrücke sein. B heißt ein *hinteres kleinstes gemeinsames Vielfaches* der zwei linearen homogenen Differentialausdrücke G und H , wenn B der Differentialausdruck niedrigster Ordnung ist, der sowohl durch G als auch durch H hinten teilbar ist ($B = B_1 G = B_2 H$). Mit dem Begriff des hinteren kleinsten gemeinsamen Vielfachen hängt die hintere Teilerfremdheit zusammen. Die linearen homogenen Differentialausdrücke G und H sind dann und nur dann *hinten teilerfremd*, d. h. es existiert kein linearer homogener Differentialausdruck D , so daß $G = G_1 D$ und gleichzeitig $H = H_1 D$ ist, wenn die Ordnung des hinteren kleinsten gemeinsamen Vielfachen von G und H gleich der Summe der Ordnungen von G und H ist¹⁶⁾.

Wir beweisen nunmehr den

Satz III. *Ist der Differentialausdruck B das hintere kleinste gemeinsame Vielfache von zwei hinten teilerfremden Differentialausdrücken*

$$G \equiv g_1 z + g_2 \frac{dz}{dx} + g_3 \frac{d^2 z}{dx^2} + \dots + g_{i+1} \frac{d^i z}{dx^i} \quad (g_{i+1} \neq 0)$$

und

$$H \equiv h_1 z + h_2 \frac{dz}{dx} + h_3 \frac{d^2 z}{dx^2} + \dots + h_{l+1} \frac{d^l z}{dx^l} \quad (h_{l+1} \neq 0) (j + l = n),$$

so ist die zu dem Differentialausdrucke B zugehörige Begleitmatrix $\mathfrak{B}^*$ von derselben Art mit der folgenden zerfallenden Matrix

¹⁶⁾ Ohne die Integralexistenz vorauszusetzen, beweist man den im Texte angeführten Satz folgendermaßen: Daß man ein hinteres kleinstes gemeinsames Vielfaches von G und H finden kann, dessen Ordnung gleich oder kleiner als die Summe der Ordnungen von G und H ist, sieht man leicht. Soll die Ordnung eines hinteren kleinsten gemeinsamen Vielfachen von G und H kleiner als die Summe der Ordnungen von G und H sein, so muß eine aus den Koeffizienten von G und H gebildete Determinante, die Resultante der Differentialausdrücke G und H , verschwinden. Sind G und H hinten teilerfremd und auch nur in diesem Falle, existieren zwei lineare homogene Differentialausdrücke U_1 und V_1 , so daß $U_1 G + V_1 H = y$ ist. Aus dieser Relation ergibt sich aber, daß die fragliche Determinante nicht verschwinden kann. Einen anderen Beweis ohne die Integralexistenz findet man in der in Anmerkung *) genannten Dissertation von H. Blumberg, S. 20. Vgl. auch L. Heffter, Über gemeinsame Vielfache linearer Differentialausdrücke und lineare Differentialgleichungen derselben Klasse, Journ. f. d. r. u. ang. Math. 116 (1896), S. 160, wo der Satz mittels der Integralexistenz bewiesen wird.

$$\mathfrak{B}: \left| \begin{array}{cccccccccccc} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{g_1}{g_{j+1}} & \frac{g_2}{g_{j+1}} & \frac{g_3}{g_{j+1}} & \dots & \frac{g_j}{g_{j+1}} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{h_1}{h_{l+1}} & \frac{h_2}{h_{l+1}} & \frac{h_3}{h_{l+1}} & \dots & \frac{h_l}{h_{l+1}} \end{array} \right|$$

Zum Beweise bedienen wir uns n Unbestimmter $y_1, y_2, \dots, y_n$ und bilden mit ihnen das zu $\mathfrak{B}$ zugehörige Differentialsystem

$$\frac{dy_1}{dx} - y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} - y_3, \dots, \frac{dy_{j-1}}{dx} - y_j, \quad \frac{dy_j}{dx} + \frac{g_1}{g_{j+1}} y_1 + \frac{g_2}{g_{j+1}} y_2 + \dots + \frac{g_j}{g_{j+1}} y_j, \\ \frac{dy_{j+1}}{dx} - y_{j+2}, \quad \frac{dy_{j+2}}{dx} - y_{j+3}, \dots, \frac{dy_{n-1}}{dx} - y_n, \quad \frac{dy_n}{dx} + \frac{h_1}{h_{l+1}} y_{j+1} + \frac{h_2}{h_{l+1}} y_{j+2} + \dots + \frac{h_l}{h_{l+1}} y_n.$$

Statt $y_1, y_2, \dots, y_n$ führen wir n neue Funktionen $z_1, z_2, \dots, z_n$ ein, die wir definieren:

$$(59) \quad z_1 = y_1 + y_{j+1}$$

und allgemein soll, wenn

$$(60) \quad z_k = p_{k1} y_1 + p_{k2} y_2 + \dots + p_{kn} y_n$$

ist,

$$(61) \quad z_{k+1} = \frac{dp_{k1}}{dx} y_1 + \frac{dp_{k2}}{dx} y_2 + \dots + \frac{dp_{kn}}{dx} y_n + p_{k1} y_2 + p_{k2} y_3 + \dots + p_{k,j-1} y_j \\ + p_{kj} \left(-\frac{g_1}{g_{j+1}} y_1 - \frac{g_2}{g_{j+1}} y_2 - \dots - \frac{g_j}{g_{j+1}} y_j \right) + p_{k,j+1} y_{j+2} + p_{k,j+2} y_{j+3} \\ + \dots + p_{k,n-1} y_n + p_{kn} \left(-\frac{h_1}{h_{l+1}} y_{j+1} - \frac{h_2}{h_{l+1}} y_{j+2} - \dots - \frac{h_l}{h_{l+1}} y_n \right)$$

sein, also

$$(62) \quad p_{k+1,1} = \frac{dp_{k1}}{dx} - \frac{p_{kj} \cdot g_1}{g_{j+1}}, \quad p_{k+1,2} = \frac{dp_{k2}}{dx} + p_{k1} - \frac{p_{kj} \cdot g_2}{g_{j+1}}, \\ p_{k+1,3} = \frac{dp_{k3}}{dx} + p_{k2} - \frac{p_{kj} \cdot g_3}{g_{j+1}}, \dots, p_{k+1,j} = \frac{dp_{kj}}{dx} + p_{k,j-1} - p_{kj} \cdot \frac{g_j}{g_{j+1}}, \\ p_{k+1,j+1} = \frac{dp_{k,j+1}}{dx} - p_{kn} \cdot \frac{h_1}{h_{l+1}}, \quad p_{k+1,j+2} = \frac{dp_{k,j+2}}{dx} + p_{k,j+1} - p_{kn} \cdot \frac{h_2}{h_{l+1}}, \\ p_{k+1,j+3} = \frac{dp_{k,j+3}}{dx} + p_{k,j+2} - p_{kn} \cdot \frac{h_3}{h_{l+1}}, \dots, p_{k+1,n} = \frac{dp_{kn}}{dx} + p_{k,n-1} - p_{kn} \cdot \frac{h_l}{h_{l+1}}.$$

Die Anfangswerte der p lauten

$$p_{11} = 1, p_{1j+1} = 1, p_{12} = p_{13} = \dots = p_{1j} = p_{1j+2} = \dots = p_{1n-1} = p_{1n} = 0.$$

Aus ihnen und aus (62) folgt dann $p_{22} = 1, p_{21} = p_{23} = \dots = p_{2j} = 0$, weiter $p_{33} = 1, p_{31} = p_{32} = p_{34} = \dots = p_{3j} = 0$ usw., schließlich $p_{jj} = 1, p_{j1} = p_{j2} = \dots = p_{jj-1} = 0$. Man erhält also für $t = 1, 2, \dots, j$:

$$(64) \quad z_t = y_t + p_{t,j+1} y_{j+1} + p_{t,j+2} y_{j+2} + \dots + p_{tn} y_n.$$

Da bei den Funktionen $z_1, z_2, \dots, z_j$ rechterhand der Reihe nach $y_1, y_2, \dots, y_j$ neu auftreten, sind $z_1, z_2, \dots, z_j$ sicher linear unabhängig. Mit der Einführung der Funktionen $z_1, z_2, \dots$ gehen wir soweit, daß $z_1, z_2, \dots, z_{j+l'}$ linear unabhängig sind, während $z_1, z_2, \dots, z_{j+l'+1}$ in Dependenz stehen. Zwischen ihnen bestehe die Relation

$$(65) \quad \delta_1 z_1 + \delta_2 z_2 + \dots + \delta_{j+l'+1} z_{j+l'+1} = 0 \quad (\delta_{j+l'+1} \neq 0).$$

Da sich (64) auch schreiben läßt

$$(64^*) \quad y_t = z_t - p_{t,j+1} y_{j+1} - p_{t,j+2} y_{j+2} - \dots - p_{tn} y_n \quad (t = 1, 2, \dots, j),$$

folgt aus (60), wenn man in (60) für $y_1, y_2, \dots, y_j$ ihre durch (64^{*}) bestimmten Werte einsetzt,

$$(66) \quad z_k = p_{k1} z_1 + p_{k2} z_2 + \dots + p_{kj} z_j + M_k(y_{j+1}, y_{j+2}, \dots, y_n).$$

In der Formel (66), die wir für $k = j+1, j+2, \dots, j+l'+1$ anwenden wollen, bedeutet M_k eine lineare homogene Funktion von $y_{j+1}, y_{j+2}, \dots, y_n$.

Wir führen nun neue Funktionen $U_1, U_2, \dots$, ein, indem wir unter Beachtung von (66) setzen:

$$U_1 = z_{j+1} - p_{j+1,1} z_1 - p_{j+1,2} z_2 - \dots - p_{j+1,j} z_j = M_{j+1}(y_{j+1}, y_{j+2}, \dots, y_n),$$

$$U_2 = z_{j+2} - p_{j+2,1} z_1 - p_{j+2,2} z_2 - \dots - p_{j+2,j} z_j = M_{j+2}(y_{j+1}, y_{j+2}, \dots, y_n),$$

$\vdots$

$$U_{l'} = z_{j+l'} - p_{j+l',1} z_1 - p_{j+l',2} z_2 - \dots - p_{j+l',j} z_j = M_{j+l'}(y_{j+1}, y_{j+2}, \dots, y_n),$$

$$U_{l'+1} = z_{j+l'+1} - p_{j+l'+1,1} z_1 - p_{j+l'+1,2} z_2 - \dots - p_{j+l'+1,j} z_j \\ = M_{j+l'+1}(y_{j+1}, y_{j+2}, \dots, y_n).$$

Die Funktionen $U_1, U_2, \dots, U_{l'}$ sind linear unabhängig; denn jede Relation zwischen ihnen würde eine solche zwischen den unabhängigen Funktionen $z_1, z_2, \dots, z_{j+l'}$ nach sich ziehen. Hingegen sind $U_1, U_2, \dots, U_{l'+1}$ in Dependenz. Infolge von (67) setzt sich nämlich die Relation (65) in

$$(68) \quad \delta_1 z_1 + \delta_2 z_2 + \dots + \delta_j z_j + \delta_{j+1} \left(\sum_{s=1}^{s=j} p_{j+1,s} z_s + M_{j+1} \right) \\ + \delta_{j+2} \left(\sum_{s=1}^{s=j} p_{j+2,s} z_s + M_{j+2} \right) + \dots + \delta_{j+l'+1} \left(\sum_{s=1}^{s=j} p_{j+l'+1,s} z_s + M_{j+l'+1} \right) =$$

Da $y_1, y_2, \dots, y_n$ Unbestimmte sind und $y_1, y_2, \dots, y_j$ sich nach (64*) durch die unabhängigen Funktionen $z_1, z_2, \dots, z_j$ ausdrücken lassen, sind auch $z_1, z_2, \dots, z_j, y_{j+1}, y_{j+2}, \dots, y_n$ *linear unabhängig*. Hieraus schließt man, daß in der Relation (68) die Faktoren von $z_1, z_2, \dots, z_j$ Null sein müssen. Daher ergibt sich:

$$\delta_{j+1} M_{j+1} + \delta_{j+2} M_{j+2} + \dots + \delta_{j+l'+1} M_{j+l'+1} = 0,$$

d. h. nach (67):

$$(68^*) \quad \delta_{j+1} U_1 + \delta_{j+2} U_2 + \dots + \delta_{j+l'+1} U_{l'+1} = 0 \quad (\delta_{j+l'+1} \neq 0).$$

Wir bilden aus $p_{j1} = p_{j2} = \dots = p_{jj-1} = 0$, $p_{jj} = 1$ nach dem Formelsystem (62)

$$p_{j+1,1} = -\frac{g_1}{g_{j+1}}, \quad p_{j+1,2} = -\frac{g_2}{g_{j+1}}, \quad \dots, \quad p_{j+1,j} = -\frac{g_j}{g_{j+1}}$$

und erhalten nach (67):

$$(69) \quad U_1 = z_{j+1} + \frac{g_1}{g_{j+1}} z_1 + \frac{g_2}{g_{j+1}} z_2 + \dots + \frac{g_j}{g_{j+1}} z_j.$$

Weiter ist nach (67):

$$U_{s+1} = z_{j+s+1} - p_{j+s+1,1} z_1 - p_{j+s+1,2} z_2 - \dots - p_{j+s+1,j} z_j \\ (s = 1, 2, \dots, l')$$

oder auf Grund von (62):

$$U_{s+1} = z_{j+s+1} - \frac{dp_{j+s+1,1}}{dx} z_1 - \frac{dp_{j+s+1,2}}{dx} z_2 - \dots - \frac{ap_{j+s+1,j}}{dx} z_j \\ - p_{j+s+1,1} z_2 - p_{j+s+1,2} z_3 - \dots - p_{j+s+1,j-1} z_j \\ + p_{j+s+1,j} \left(\frac{g_1}{g_{j+1}} z_1 + \frac{g_2}{g_{j+1}} z_2 + \dots + \frac{g_j}{g_{j+1}} z_j \right).$$

Da $U_s = z_{j+s} - p_{j+s,1} z_1 - p_{j+s,2} z_2 - \dots - p_{j+s,j} z_j$ ist, wird

$$(70) \quad U_{s+1} = \frac{dU_s}{dx} + \left(z_{j+s+1} - \frac{dz_{j+s}}{dx} \right) - p_{j+s+1} \left(z_2 - \frac{dz_1}{dx} \right) \\ - p_{j+s+1,2} \left(z_3 - \frac{dz_2}{dx} \right) - \dots - p_{j+s+1,j-1} \left(z_j - \frac{dz_{j-1}}{dx} \right) \\ + p_{j+s+1,j} \left(\frac{g_1}{g_{j+1}} z_1 + \frac{g_2}{g_{j+1}} z_2 + \dots + \frac{g_j}{g_{j+1}} z_j + \frac{dz_j}{dx} \right).$$

Wir ersetzen nunmehr die $j + l'$ unabhängigen Funktionen $z_1, z_2, \dots, z_{j+l'}$ durch $z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^{j+l'-1}z}{dx^{j+l'-1}}$. Dann geht, wie sich aus (69) ergibt, U_1 über in

$$\frac{d^j z}{dx^j} + \frac{g_1}{g_{j+1}} z + \frac{g_2}{g_{j+1}} \frac{dz}{dx} + \dots + \frac{g_j}{g_{j+1}} \frac{d^{j-1} z}{dx^{j-1}} = \frac{G}{g_{j+1}},$$

wobei G den Differentialausdruck

$$G \equiv g_1 z + g_2 \frac{dz}{dx} + \dots + g_{j+1} \frac{d^j z}{dx^j}$$

bedeutet. Durch die Einführung von $z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^{j+l'-1} z}{dx^{j+l'-1}}$ für die unabhängigen Funktionen $z_1, z_2, \dots, z_{j+l'}$ reduziert sich, wie aus (70) folgt, U_{s+1} für $s = 1, 2, \dots, l' - 1$ auf $\frac{dU_s}{dx} + \frac{p_{j+s,j}}{g_{j+1}} G$. Da U_1 in $\frac{G}{g_{j+1}}$ übergegangen ist, werden demnach $U_2, U_3, \dots, U_{l'}$ lineare homogene Funktionen von G und dessen Ableitungen.

Für $U_{l'+1}$ erhält man aus (70) den Ausdruck

$$\frac{dU_{l'}}{dx} + \left(z_{j+l'+1}^0 - \frac{d^{j+l'} z}{dx^{j+l'}} \right) + \frac{p_{j+l',j}}{g_{j+1}} G;$$

wobei bedeutet $z_{j+l'+1}^0$ denjenigen Wert, der $z_{j+l'+1}$ entspricht, wenn man $z, z_2, \dots, z_{j+l'}$ durch

$$z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^{j+l'-1} z}{dx^{j+l'-1}}$$

ersetzt. Nach (65) ist

$$z_{j+l'+1}^0 = -\frac{1}{\delta_{j+l'+1}} \left[\delta_1 z + \delta_2 \frac{dz}{dx} + \delta_3 \frac{d^2 z}{dx^2} + \dots + \delta_{j+l'} \frac{d^{j+l'-1} z}{dx^{j+l'-1}} \right].$$

folglich reduziert sich $U_{l'+1}$ auf

$$-\frac{1}{\delta_{j+l'+1}} \left[\delta_1 z + \delta_2 \frac{dz}{dx} + \dots + \delta_{j+l'} \frac{d^{j+l'-1} z}{dx^{j+l'-1}} + \delta_{j+l'+1} \frac{d^{j+l'} z}{dx^{j+l'}} \right] + \frac{p_{j+l',j}}{g_{j+1}} G$$

da $U_{l'}$ eine lineare homogene Funktion von G und dessen Ableitungen ist, geht $U_{l'+1}$ über in eine lineare homogene Funktion von G und dessen Ableitungen vermindert um

$$\frac{1}{\delta_{j+l'+1}} \left[\delta_1 z + \delta_2 \frac{dz}{dx} + \dots + \delta_{j+l'+1} \frac{d^{j+l'} z}{dx^{j+l'}} \right].$$

Setzt man für $U_1, U_2, \dots, U_{l'+1}$ die gefundenen Werte in die Relation (68*), so erhält man linkerhand eine lineare homogene Funktion von G und dessen Ableitungen vermindert um

$$\frac{\delta_{j+l'+1}}{\delta_{j+l'+1}} \cdot \left[\delta_1 z + \delta_2 \frac{dz}{dx} + \dots + \delta_{j+l'+1} \frac{d^{j+l'} z}{dx^{j+l'}} \right].$$

Da die rechte Seite von (68*) den Wert Null hat, liegt eine Relation in der Form

$$\delta_1 z + \delta_2 \frac{dz}{dx} + \dots + \delta_{j+l'+1} \frac{d^{j+l'} z}{dx^{j+l'}} = \sigma_1 G + \sigma_2 \frac{dG}{dx} + \sigma_3 \frac{d^2 G}{dx^2} + \dots$$

vor, d. h. der lineare homogene Differentialausdruck

$$\delta_1 z + \delta_2 \frac{dz}{dx} + \dots + \delta_{j+l'+1} \frac{d^{j+l'} z}{dx^{j+l'}}$$

ist durch G teilbar. Da G und H , also auch $y_1, y_2, \dots, y_j$ und $y_{j+1}, y_{j+2}, \dots, y_{j+l'}$ völlig gleichberechtigt sind, hätte man die Funktionen $z_1, z_2, \dots, z_{j+l'}$ auch mit $z_1, z_2, \dots, z_{l+j'}$ bezeichnen und mit l statt mit j operieren können. Hierdurch ergibt sich, daß unser Differentialausdruck

$$(71) \quad \delta_1 z + \delta_2 \frac{dz}{dx} + \dots + \delta_{j+l'+1} \frac{d^{j+l'} z}{dx^{j+l'}}$$

auch durch H teilbar ist. Da G und H hinten teilerfremd sind und G und H die Ordnungen j bzw. l haben, muß die Ordnung $j+l'$ des Differentialausdruckes (71) mindestens gleich $n = j+l$ sein, also $j+l' \geq n$. Nun ist aber $j+l' \leq n$, da von den Funktionen $z_1, z_2, \dots, z_{j+l'}$ höchstens n linear unabhängig sein können. Mithin muß $l' = l$ sein. Wählt man $\delta_{j+l'+1}$, was möglich ist, da man die Relation (65) mit einem Faktor multiplizieren darf, gleich dem Koeffizienten der höchsten Ableitung des Differentialausdruckes B , so stimmt B , da es nach Voraussetzung kleinstes gemeinsames Vielfaches von G und H ist, mit (71) überein.

Zunächst vermerken wir, da $l' = l$ ist, daß die n Funktionen $z_1, z_2, \dots, z_n$ linear unabhängig sind. Hierauf gehen wir zu den Relationen (60) und (61) zurück und entnehmen ihnen die Beziehung

$$(72) \quad \begin{aligned} \frac{dz_k}{dx} - z_{k+1} &= p_{k1} \left(\frac{dy_1}{dx} - y_2 \right) + p_{k2} \left(\frac{dy_2}{dx} - y_3 \right) \\ &+ \dots + p_{kj} \left(\frac{dy_j}{dx} + \frac{g_1}{g_{j+1}} y_1 + \frac{g_2}{g_{j+1}} y_2 + \dots + \frac{g_j}{g_{j+1}} y_j \right) \\ &+ p_{k,j+1} \left(\frac{dy_{j+1}}{dx} - y_{j+2} \right) + p_{k,j+2} \left(\frac{dy_{j+2}}{dx} - y_{j+3} \right) \\ &+ \dots + p_{kn} \left(\frac{dy_n}{dx} + \frac{h_1}{h_{l+1}} y_{j+1} + \frac{h_2}{h_{l+1}} y_{j+2} + \dots + \frac{h_l}{h_{l+1}} y_n \right). \end{aligned}$$

In der Relation (72) setzen wir der Reihe nach $k = 1, 2, \dots, n-1$ und in der sich für $k = n$ ergebenden Gleichung führen wir nach (65)

$$z_{n+1} = -\frac{1}{\delta_{n+1}} [\delta_1 z_1 + \delta_2 z_2 + \dots + \delta_n z_n]$$

ein; dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
 3) \quad & \frac{dz_n}{dx} + \frac{\delta_1}{\delta_{n+1}} z_1 + \frac{\delta_2}{\delta_{n+1}} z_2 + \dots + \frac{\delta_n}{\delta_{n+1}} z_n \\
 &= p_{n1} \left(\frac{dy_1}{dx} - y_2 \right) + p_{n2} \left(\frac{dy_2}{dx} - y_3 \right) + \dots \\
 &+ p_{nj} \left(\frac{dy_j}{dx} + \frac{g_1}{g_{j+1}} y_1 + \frac{g_2}{g_{j+1}} y_2 + \dots + \frac{g_j}{g_{j+1}} y_j \right) \\
 &+ p_{nj+1} \left(\frac{dy_{j+1}}{dx} - y_{j+2} \right) + p_{nj+2} \left(\frac{dy_{j+2}}{dx} - y_{j+3} \right) + \dots \\
 &+ p_{nn} \left(\frac{dy_n}{dx} + \frac{h_1}{h_{l+1}} y_{j+1} + \frac{h_2}{h_{l+1}} y_{j+2} + \dots + \frac{h_l}{h_{l+1}} y_n \right).
 \end{aligned}$$

Nun war nachgewiesen, daß

$$B \equiv \delta_1 z + \delta_2 \frac{dz}{dx} + \delta_3 \frac{d^2 z}{dx^2} + \dots + \delta_{j+l+1} \frac{d^n z}{dx^n}$$

st. Mithin lautet die Begleitmatrix $\mathfrak{B}^*$ von B :

$$\mathfrak{B}^*: \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ \frac{\delta_1}{\delta_{n+1}} & \frac{\delta_2}{\delta_{n+1}} & \frac{\delta_3}{\delta_{n+1}} & \dots & \frac{\delta_n}{\delta_{n+1}} \end{array} \right\|$$

Bezeichnet man die Matrix $\|p_{ik}\|$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$) mit $\mathfrak{P}$, so lassen sich die $n-1$ Gleichungen (72) und die Gleichung (73) zusammenfassen in die Matrixengleichung

$$74) \quad \left(\frac{dz}{dx} \right) + \mathfrak{B}^*(z) = \mathfrak{P} \left(\left(\frac{dy}{dx} \right) + \mathfrak{Z}(y) \right),$$

wobei $\mathfrak{Z}$ die anfangs des Paragraphen charakterisierte zerfallende Matrix ist. Nach den Gleichungen (60) ist

$$(z) = \mathfrak{P}(y),$$

also

$$\left(\frac{dz}{dx} \right) = \mathfrak{P}'(y) + \mathfrak{P} \left(\frac{dy}{dx} \right),$$

wobei $\mathfrak{P}'$ die aus $\mathfrak{P}$ durch Differentiation der Elemente hervorgehende Matrix bedeutet. Mithin läßt sich (74)

$$\mathfrak{P}'(y) + \mathfrak{P} \left(\frac{dy}{dx} \right) + \mathfrak{B}^* \mathfrak{P}(y) = \mathfrak{P} \left(\frac{dy}{dx} \right) + \mathfrak{P} \mathfrak{Z}(y)$$

oder

$$\mathfrak{P}'(y) + \mathfrak{B}^* \mathfrak{P}(y) = \mathfrak{P} \mathfrak{Z}(y)$$

schreiben. Da die Funktionen $y_1, y_2, \dots, y_n$ Unbestimmte sind, folgt hieraus

$$\mathfrak{P}' + \mathfrak{B}^* \mathfrak{P} = \mathfrak{P} \mathfrak{Z}$$

oder

$$(75) \quad \mathfrak{B}^* \mathfrak{B} = -\mathfrak{B}' + \mathfrak{B} \mathfrak{B}.$$

Aus der Unabhängigkeit der n Funktionen $z_1, z_2, \dots, z_n$ schließt man auf Grund der Gleichungen (60), daß die Determinante der Matrix $\mathfrak{B}$ ungleich Null ist. Mithin besagt die Gleichung (75), daß die Begleitmatrix $\mathfrak{B}^*$ und die zerfallende Matrix $\mathfrak{B}$ von derselben Art sind. Da die Koeffizienten der Matrix $\mathfrak{B}$ durch die Gleichungen (62) und (63) gegeben sind, ist unser Satz III nicht nur bewiesen, sondern es ist auch eine Methode angegeben, um die Koeffizienten der Matrix $\mathfrak{B}$ oder der linearen Substitution $(z) = \mathfrak{B}(y)$ tatsächlich derart zu finden, daß die Begleitmatrix $\mathfrak{B}^*$ oder das zugehörige Differentialsystem $\left(\frac{dz}{dx}\right) + \mathfrak{B}^*(z)$ in die zerlegbare Matrix $\mathfrak{B}$ bzw. in das zugehörige Differentialsystem $\left(\frac{dy}{dx}\right) + \mathfrak{B}(y)$ übergeführt wird.

§ 5.

Ein linearer homogener Differentialausdruck ist als hinteres kleinstes gemeinsames Vielfaches von zwei hinten teilerfremden Differentialausdrücken darstellbar, wenn die Begleitmatrix des Differentialausdruckes mit einer zerfallenden Matrix von derselben Art ist.

Während im vorigen Paragraphen aus der Tatsache, daß ein linearer homogener Differentialausdruck hinteres kleinstes gemeinsames Vielfaches zweier hinten teilerfremden Differentialausdrücke war, die Transformation der Begleitmatrix in eine zerfallende Matrix erschlossen wurde, soll nun umgekehrt gezeigt werden, daß aus der Möglichkeit der Transformation der Begleitmatrix in eine zerfallende Matrix die Darstellbarkeit des zugehörigen linearen homogenen Differentialausdruckes als hinteres kleinstes gemeinsames Vielfaches folgt. Wir beweisen den folgenden

Satz IV. Ist die Begleitmatrix

$$\mathfrak{B}^*: \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ \frac{\beta_1}{\beta_{n+1}} & \frac{\beta_2}{\beta_{n+1}} & \frac{\beta_3}{\beta_{n+1}} & \dots & \frac{\beta_n}{\beta_{n+1}} \end{array} \right\|$$

eines linearen homogenen Differentialausdruckes

$$B \equiv \beta_1 z + \beta_2 \frac{dz}{dx} + \dots + \beta_n \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \beta_{n+1} \frac{d^n z}{dx^n} \quad (\beta_{n+1} \neq 0)$$

von derselben Art mit einer zerfallenden Matrix

$$\mathfrak{B} = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1j} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2j} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{j1} & s_{j2} & \dots & s_{jj} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & s_{j+1,j+1} & s_{j+1,j+2} & \dots & s_{j+1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & s_{j+2,j+1} & s_{j+2,j+2} & \dots & s_{j+2,n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & s_{n,j+1} & s_{n,j+2} & \dots & s_{n,n} \end{vmatrix},$$

0 ist der Differentialausdruck B das hintere kleinste gemeinsame Vielfache von zwei hinten teilerfremden Differentialausdrücken S_1 und S_2 der Ordnungen j und l . Die links oben stehende Teilmatrix von $\mathfrak{B}$ ist von derselben Art mit der Begleitmatrix des Differentialausdruckes S_1 und die rechts unten stehende mit der Begleitmatrix des Differentialausdruckes S_2 .

Da die Begleitmatrix $\mathfrak{B}^*$ mit der Matrix $\mathfrak{B}$ nach Voraussetzung von derselben Art sind, existieren, wie unter β) im § 2 auf S. 13 gezeigt ist, Funktionen $p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1n}$ von folgender Beschaffenheit: Bildet man aus ihnen

$$(76) \quad p_{i+1,k} = p'_{ik} - \sum_{t=1}^{i=n} p_{it} s_{tk} \quad (i = 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots, n)$$

und führt, unter $y_1, y_2, \dots, y_n$ n unbestimmte willkürliche Funktionen verstanden,

$$(77) \quad z_i = p_{i1} y_1 + p_{i2} y_2 + \dots + p_{in} y_n \quad (i = 1, 2, \dots)$$

in, so ergibt sich, daß $z_1, z_2, \dots, z_n$ linear unabhängig sind, während $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$, entsprechend den Koeffizienten der Begleitmatrix $\mathfrak{B}^*$, durch eine Relation

$$(78) \quad \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \dots + \beta_{n+1} z_{n+1} = 0$$

verknüpft sind.

Wir setzen

$$(79) \quad u_i = p_{i1} y_1 + p_{i2} y_2 + \dots + p_{ij} y_j \quad (i = 1, 2, \dots).$$

$$(80) \quad U_i = p_{i,j+1} y_{j+1} + p_{i,j+2} y_{j+2} + \dots + p_{in} y_n \quad (i = 1, 2, \dots),$$

also

$$(81) \quad z_i = u_i + U_i.$$

Da für $t \leq j$ und $k \geq j+1$ nach der Form der Matrix $\mathfrak{B}$ die Größen $p_{tk} = 0$ sind, werden die zur Bildung von U_i verwandten Funktionen p_{ik} ,

wie aus (76) folgt, nur aus den in der Matrix β rechts unten stehenden Größen gebildet. Ebenso sind, da s_{ik} für $t \geq j+1$ und $k \leq j$ den Wert Null hat, die bei den u_i rechterhand in (79) auftretenden Funktionen p_{ik} wie aus (76) folgt, nur aus den bei der Matrix β links oben stehenden Größen gebildet.

Genau ebenso wie im § 2 [vgl. die durch (27) dort eingeführten Größen U_i] folgt, daß $U_1, U_2, \dots, U_l$ linear unabhängig sind, hingegen zwischen $U_1, U_2, \dots, U_{l+1}$ eine lineare Relation besteht, die wir schreiben

$$(82) \quad \lambda_1^{(1)} U_1 + \lambda_2^{(1)} U_2 + \dots + \lambda_{l+1}^{(1)} U_{l+1} = 0 \quad (\lambda_{l+1}^{(1)} \neq 0)$$

Dann ist, wie im § 2 nachgewiesen, die Matrix

$$\left\| \begin{array}{ccccc} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ \frac{\lambda_1^{(1)}}{\lambda_{l+1}^{(1)}} & \frac{\lambda_2^{(1)}}{\lambda_{l+1}^{(1)}} & \frac{\lambda_3^{(1)}}{\lambda_{l+1}^{(1)}} & \dots & \frac{\lambda_l^{(1)}}{\lambda_{l+1}^{(1)}} \end{array} \right\|$$

von derselben Art mit der bei β rechts unten stehenden Matrix $\|s_{ik}\|$ ($i, k = j+1, j+2, \dots, n$), und der Differentialausdruck B ist hinten teilbar durch den Differentialausdruck

$$S_2 \equiv \lambda_1^{(1)} z + \lambda_2^{(1)} \frac{dz}{dx} + \dots + \lambda_{l+1}^{(1)} \frac{d^l z}{dx^l}.$$

Da die Matrix β zerfällt, gilt für $u_1, u_2, \dots, u_j$ etwas Analoges. Diese Funktionen sind unabhängig, während $u_1, u_2, \dots, u_{j+1}$ in linearer Dependenz stehen. Die Relation, die $u_1, u_2, \dots, u_{j+1}$ verknüpft, lautet etwa

$$(83) \quad k_1^{(1)} u_1 + k_2^{(1)} u_2 + \dots + k_{j+1}^{(1)} u_{j+1} = 0 \quad (k_{j+1}^{(1)} \neq 0)$$

Dann ist wegen der Gleichberechtigung, die zwischen den u_i und U herrscht¹⁷⁾, die Matrix

$$\left\| \begin{array}{ccccc} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ \frac{k_1^{(1)}}{k_{j+1}^{(1)}} & \frac{k_2^{(1)}}{k_{j+1}^{(1)}} & \frac{k_3^{(1)}}{k_{j+1}^{(1)}} & \dots & \frac{k_j^{(1)}}{k_{j+1}^{(1)}} \end{array} \right\|$$

¹⁷⁾ Im § 2 ist diese natürlich nicht vorhanden.

von derselben Art mit der bei $\S$ links oben stehenden Matrix $\|s_{ik}\|$ ($i, k = 1, 2, \dots, j$), und der Differentialausdruck B ist hinten teilbar durch den Differentialausdruck

$$S_1 \equiv k_1^{(1)} z + k_2^{(1)} \frac{dz}{dx} + \dots + k_{j+1}^{(1)} \frac{d^j z}{dx^j}.$$

Da die Ordnung von B gleich der Summe der Ordnungen von S_1 und S_2 ist, muß zum Nachweise, daß B das hintere kleinste gemeinsame Vielfache von S_1 und S_2 ist, nur noch gezeigt werden, daß S_1 und S_2 hinten teilerfremd sind. Angenommen, S_1 und S_2 hätten einen hinteren gemeinsamen Teiler D , so würden zwei lineare homogene Differentialausdrücke M und N existieren, so daß die symbolische Gleichung zwischen Differentialausdrücken

$$MS_1 + NS_2 = 0$$

bestände und M von niedrigerer Ordnung als S_2 und N von niedrigerer Ordnung als S_1 wäre. Wir schreiben die letzte Relation ausführlich

$$(84) \quad m_1 S_1 + m_2 \frac{dS_1}{dx} + \dots + m_l \frac{d^{l-1} S_1}{dx^{l-1}} + n_1 S_2 + n_2 \frac{dS_2}{dx} + \dots + n_j \frac{d^{j-1} S_2}{dx^{j-1}} = 0.$$

Die Gleichung (84) ist eine Identität in $z, \frac{dz}{dx}, \dots$. Sie bleibt daher richtig, wenn man die in (84) auftretenden Größen $z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}$ durch $z_1, z_2, \dots, z_n$ ersetzt. Führt man aber $z_1, z_2, \dots, z_n$ ein, so gehen $S_2, \frac{dS_2}{dx}, \dots, \frac{d^{j-1} S_2}{dx^{j-1}}$ über in die durch die Gleichungen (35) auf S. 17 definierten Größen $V_1, V_2, \dots, V_j$, aus denen $S_2, \frac{dS_2}{dx}, \dots, \frac{d^{j-1} S_2}{dx^{j-1}}$ abgeleitet waren (vgl. S. 18). Man hat also

$$(35) \quad \begin{aligned} V_1 &= \lambda_1^{(1)} z_1 + \lambda_2^{(1)} z_2 + \dots + \lambda_{l+1}^{(1)} z_{l+1}, \\ V_2 &= \lambda_1^{(2)} z_1 + \lambda_2^{(2)} z_2 + \dots + \lambda_{l+2}^{(2)} z_{l+2}, \\ &\vdots \\ V_j &= \lambda_1^{(j)} z_1 + \lambda_2^{(j)} z_2 + \dots + \lambda_{l+j}^{(j)} z_{l+j}, \end{aligned}$$

wobei $\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}, \dots, \lambda_{l+2}^{(2)}$ aus $\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots, \lambda_{l+1}^{(1)}$ nach den Gleichungen (32) gefunden werden, $\lambda_1^{(2)} = \frac{d\lambda_1^{(1)}}{dx}, \lambda_2^{(2)} = \frac{d\lambda_2^{(1)}}{dx} + \lambda_1^{(1)}, \lambda_3^{(2)} = \frac{d\lambda_3^{(1)}}{dx} + \lambda_2^{(1)}, \dots,$

$\lambda_{l+1}^{(2)} = \frac{d\lambda_{l+1}^{(1)}}{dx} + \lambda_l^{(1)}, \lambda_{l+2}^{(2)} = \lambda_{l+1}^{(1)}$, entsprechend dann weiter $\lambda_1^{(3)}, \lambda_2^{(3)}, \dots, \lambda_{l+3}^{(3)}$ aus $\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}, \dots, \lambda_{l+2}^{(2)}$ usw. Von den Funktionen $V_1, V_2, \dots, V_j$ ist auf

S. 17 ihre lineare Unabhängigkeit gezeigt, und ferner ist dort von ihnen nachgewiesen, daß sie nur von $y_1, y_2, \dots, y_j$ abhängen.

Ersetzt man $z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}$ durch $z_1, z_2, \dots, z_n$, so geht S_1 über in

$$W_1 = k_1^{(1)} z_1 + k_2^{(1)} z_2 + \dots + k_{j+1}^{(1)} z_{j+1}.$$

Bilden wir aus $k_1^{(1)}, k_2^{(1)}, \dots, k_{j+1}^{(1)}$

$$k_1^{(2)} = \frac{dk_1^{(1)}}{dx}, \quad k_2^{(2)} = \frac{dk_2^{(1)}}{dx} + k_1^{(1)}, \quad k_3^{(2)} = \frac{dk_3^{(1)}}{dx} + k_2^{(1)}, \quad \dots$$

$$k_{j+1}^{(2)} = \frac{dk_{j+1}^{(1)}}{dx} + k_j^{(1)}, \quad k_{j+2}^{(2)} = k_{j+1}^{(1)}$$

und führen ein

$$W_2 = k_1^{(2)} z_1 + k_2^{(2)} z_2 + \dots + k_{j+2}^{(2)} z_{j+2}, \quad \text{dann so fortfahrend}$$

$$W_3 = k_1^{(3)} z_1 + k_2^{(3)} z_2 + \dots + k_{j+3}^{(3)} z_{j+3},$$

$\vdots$

$$W_l = k_1^{(l)} z_1 + k_2^{(l)} z_2 + \dots + k_{j+l}^{(l)} z_{j+l},$$

so sind infolge der Zerlegbarkeit der Matrix $\mathfrak{B}$ die Differentialausdrücke S_1 und S_2 gleichberechtigt, und ebenso wie $V_1, V_2, \dots, V_j$ sind auch $W_1, W_2, \dots, W_l$ linear unabhängige Funktionen; diese hängen nur von $y_{j+1}, y_{j+2}, \dots, y_{j+l}$ ab. Ersetzt man $z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}$ durch $z_1, z_2, \dots, z_n$, so gehen $S_1, \frac{dS_1}{dx}, \dots, \frac{d^{l-1}S_1}{dx^{l-1}}$ in $W_1, W_2, \dots, W_l$ über.

Durch die Einführung von $z_1, z_2, \dots, z_n$ für $z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}$ verwandelt sich (84) in

$$(85) \quad m_1 W_1 + m_2 W_2 + \dots + m_l W_l + n_1 V_1 + n_2 V_2 + \dots + n_j V_j = 0.$$

Nun sind $W_1, W_2, \dots, W_l$ lineare homogene Funktionen von $y_{j+1}, y_{j+2}, \dots, y_{j+l}$, während $V_1, V_2, \dots, V_j$ nur von $y_1, y_2, \dots, y_j$ abhängen. Da $y_1, y_2, \dots, y_n$ linear unabhängig sind, spaltet sich (85) in die zwei Gleichungen

$$m_1 W_1 + m_2 W_2 + \dots + m_l W_l = 0,$$

$$n_1 V_1 + n_2 V_2 + \dots + n_j V_j = 0.$$

Infolge der linearen Unabhängigkeit von $V_1, V_2, \dots, V_j$ muß $n_1 = n_2 = \dots = n_j = 0$ sein. Ebenso ergibt sich aus der linearen Unabhängigkeit von $W_1, W_2, \dots, W_l$, daß $m_1 = m_2 = \dots = m_l = 0$ ist. Mithin ist die Relation (84) illusorisch, d. h. die Differentialausdrücke S_1 und S_2 sind hinten teilerfremd. Folglich ist B , wie bewiesen werden sollte, ein hinteres kleinstes gemeinsames Vielfaches von S_1 und S_2 .

§ 6.

Ausdehnung der Untersuchungen von § 4 und 5 auf Differentialausdrücke, die das hintere kleinste gemeinsame Vielfache von k hinten völlig teilerfremden Differentialausdrücken sind. Ihre Auffaßbarkeit als vorderes kleinstes gemeinsames Vielfaches von k vorn völlig teilerfremden Differentialausdrücken. Hauptsatz für die Begleitmatrizen solcher Differentialausdrücke.

Der Differentialausdruck B sei weitergehend als in § 4 und 5 ein *hinteres kleinstes gemeinsames Vielfaches von k Differentialausdrücken* $F_1, F_2, \dots, F_k$, d. h. B sei der Differentialausdruck niedrigster Ordnung, der durch jeden der Differentialausdrücke $F_1, F_2, \dots, F_k$ hinten teilbar ist. Ein solches Vielfaches ist bis auf einen Faktor, der eine bloße Funktion von x ist, eindeutig bestimmt.

Ist B hinteres kleinstes gemeinsames Vielfaches der linearen homogenen Differentialausdrücke $F_1, F_2, \dots, F_k$, so kann es sein, daß die Ordnung von B gleich der Summe der Ordnungen von $F_1, F_2, \dots, F_k$ ist. In diesem Falle nenne ich $F_1, F_2, \dots, F_k$ *hinten völlig teilerfremde Differentialausdrücke*¹⁸⁾. Setzt man $M_1 = F_1$, führt M_2 als hinteres kleinstes gemeinsames Vielfaches von M_1 und F_2 ein, weiter M_3 als solches von M_2 und F_2 usw., so ist B hinteres kleinstes gemeinsames Vielfaches von M_{k-1} und F_k . Dabei sind M_{k-1} und F_k hinten teilerfremd; denn hätten sie einen hinteren gemeinsamen Teiler, so wäre B hinteres kleinstes gemeinsames Vielfaches von $F_1, F_2, \dots, F_k$ und hätte im Widerspruch mit der Voraussetzung eine niedrigere Ordnung als die Summe der Ordnungen von $F_1, F_2, \dots, F_k$. Durch wiederholte Anwendung der Sätze III und IV — zuerst verwendet man die hinten teilerfremden Differentialausdrücke M_{k-1} und F_k , dann die ebenso beschaffenen M_{k-2} und F_{k-1} usw. — ergibt sich die charakteristische Bedingung dafür, daß der Differentialausdruck B hinteres kleinstes gemeinsames Vielfaches von k hinten völlig teilerfremden Differentialausdrücken ist. Wir sprechen diese Bedingung aus in dem

Hauptsatz II. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sich ein linearer homogener Differentialausdruck B als hinteres kleinstes gemeinsames Vielfaches von k hinten völlig teilerfremden linearen*

¹⁸⁾ Im Falle $k=2$ ist offenbar die charakteristische Bedingung der hinteren völligen Teilerfremdheit von F_1 und F_2 , daß F_1 und F_2 keinen Differentialausdruck zum hinteren gemeinsamen Teiler haben; dann und nur dann ist die Ordnung des hinteren kleinsten gemeinsamen Vielfachen von F_1 und F_2 gleich der Summe der Ordnungen von F_1 und F_2 . Für $k \geq 3$ können $F_1, F_2, \dots, F_k$ zu je zweien hinten völlig teilerfremd sein, ohne sich deswegen als hinten völlig teilerfremd zu erweisen.

homogenen Differentialausdrücken $F_1, F_2, \dots, F_k$ auffassen läßt, besteht darin, daß die Begleitmatrix $\mathfrak{B}^*$ des Differentialausdruckes B von derselben Art ist mit der zerfallenden Matrix

$$\{\mathfrak{F}_{11}, \mathfrak{F}_{22}, \dots, \mathfrak{F}_{kk}\}: \begin{array}{cccc} \mathfrak{F}_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathfrak{F}_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{F}_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathfrak{F}_{kk} \end{array}$$

Dabei kann man $\mathfrak{F}_{11}, \mathfrak{F}_{22}, \dots, \mathfrak{F}_{kk}$ als Begleitmatrizen der Differentialausdrücke $F_1, F_2, \dots, F_k$ wählen, deren hinteres kleinstes gemeinsames Vielfaches der Differentialausdruck B ist.

Dem in der Literatur bisher allein verwandten hinteren kleinsten gemeinsamen Vielfachen stelle ich das *vordere* zur Seite. Den Differentialausdruck B nenne ich ein *vorderes kleinstes gemeinsames Vielfaches* der k Differentialausdrücke $G_1, G_2, \dots, G_k$, wenn B der Differentialausdruck niedrigster Ordnung ist, der durch jeden der Differentialausdrücke $G_1, G_2, \dots, G_k$ vorn teilbar ist.

Wir beweisen zunächst den folgenden Hilfssatz: Ist B irgendein vorderes kleinstes gemeinsames Vielfaches der linearen homogenen Differentialausdrücke $G_1, G_2, \dots, G_k$, so hat jedes vordere gemeinsame Vielfache der genannten Differentialausdrücke (d. h. jeder durch $G_1, G_2, \dots, G_k$ vorn teilbare Differentialausdruck) die Form BC , wobei C einen beliebigen linearen homogenen Differentialausdruck bedeutet.

Hieraus folgt im besonderen, daß, wenn

$$B \equiv \beta_1 z + \beta_2 \frac{dz}{dx} + \beta_3 \frac{d^2 z}{dx^2} + \dots + \beta_{n+1} \frac{d^n z}{dx^n}$$

ein vorderes kleinstes gemeinsames Vielfaches von $G_1, G_2, \dots, G_k$ ist, das allgemeinste vordere *kleinste* gemeinsame Vielfache die Form

$$Bf = \beta_1 (fz) + \beta_2 \frac{d(fz)}{dx} + \beta_3 \frac{d^2(fz)}{dx^2} + \dots + \beta_{n+1} \frac{d^n(fz)}{dx^n}$$

besitzt, wobei f eine bloße Funktion der unabhängigen Variablen x aus dem Rationalitätsbereiche $\sum$ bedeutet. Den Beweis führt man am einfachsten mit Hilfe des Begriffes des adjungierten Differentialausdruckes. Ist

$$Q \equiv q_0 z + q_1 \frac{dz}{dx} + q_2 \frac{d^2 z}{dx^2} + \dots + q_n \frac{d^n z}{dx^n}$$

irgendein linearer homogener Differentialausdruck, so soll allgemein sein adjungierter Differentialausdruck mit $\hat{Q}$ bezeichnet werden; es ist

$$\hat{Q} \equiv q_0 z + (-1) \frac{d(q_1 z)}{dx} + (-1)^2 \frac{d^2(q_2 z)}{dx^2} + \dots + (-1)^n \frac{d^n(q_n z)}{dx^n}.$$

Der adjungierte Differentialausdruck von $\hat{Q}$ ist Q , und ferner gilt der Frobeniussche¹⁹⁾ Satz, daß, wenn sich Q darstellen läßt als das Produkt RS , so ist $\hat{Q} = \hat{S}\hat{R}$. Ist B vorderes kleinstes gemeinsames Vielfaches von $G_1, G_2, \dots, G_k$, so bestehen nach der Definition des vorderen Vielfachen Zerlegungen $B = G_1 M_1, B = G_2 M_2, \dots, B = G_k M_k$. Aus ihnen folgt $\hat{B} = \hat{M}_1 \hat{G}_1 = \hat{M}_2 \hat{G}_2 = \dots = \hat{M}_k \hat{G}_k$. Diese Gleichungen besagen, daß $\hat{B}$ ein hinteres gemeinsames Vielfaches von $\hat{G}_1, \hat{G}_2, \dots, \hat{G}_k$ ist. Der Differentialausdruck $\hat{B}$ ist weiter ein hinteres *kleinstes* gemeinsames Vielfaches von $\hat{G}_1, \hat{G}_2, \dots, \hat{G}_k$. Gäbe es nämlich ein hinteres gemeinsames Vielfaches $\hat{V}$ von $\hat{G}_1, \hat{G}_2, \dots, \hat{G}_k$, das eine niedrigere Ordnung als $\hat{B}$ besäße, so wäre $\hat{V}$ ein vorderes gemeinsames Vielfaches von $G_1, G_2, \dots, G_k$ und hätte dabei eine niedrigere Ordnung als B ; dies stände aber im Widerspruch mit der Voraussetzung, daß B ein vorderes *kleinstes* gemeinsames Vielfaches von $G_1, G_2, \dots, G_k$ sein sollte. Bedeutet L ein beliebiges vorderes gemeinsames Vielfaches von $G_1, G_2, \dots, G_k$, so ist der Differentialausdruck $\hat{L}$ ein hinteres gemeinsames Vielfaches von $\hat{G}_1, \hat{G}_2, \dots, \hat{G}_k$ und mithin durch das hintere kleinste gemeinsame Vielfache $\hat{B}$ der genannten Differentialausdrücke hinten teilbar. Man erhält also eine Relation $\hat{L} = D\hat{B}$; aus dieser ergibt sich durch Übergang zu den adjungierten Differentialausdrücken $L = B\hat{D}$ oder $L = BC$, wenn man den Differentialausdruck $\hat{D}$ mit C bezeichnet.

Ist B ein vorderes *kleinstes* gemeinsames Vielfaches der linearen homogenen Differentialausdrücke $G_1, G_2, \dots, G_k$, so kann es sein, daß die Ordnung von B gleich der Summe der Ordnungen von $G_1, G_2, \dots, G_k$ ist. In diesem Falle nenne ich die Differentialausdrücke $G_1, G_2, \dots, G_k$ *vorn völlig teilerfremd*²⁰⁾. Ich ergänze nunmehr den Hauptsatz II durch II': *Ein linearer homogener Differentialausdruck B , der hinteres kleinstes gemeinsames Vielfaches von k hinten völlig teilerfremden Differentialausdrücken $F_1, F_2, \dots, F_k$ ist*²¹⁾, *läßt sich auch stets als vorderes kleinstes*

¹⁹⁾ G. Frobenius, Journ. f. r. und ang. Math. 76 (1873), S. 263, vgl. auch die Darstellung bei Ludw. Schlesinger, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Leipzig 1895, I, S. 75 ff.

²⁰⁾ Im Falle $k=2$ lautet die charakteristische Bedingung dafür, daß G_1 und G_2 vorn völlig teilerfremd sind: sie dürfen keinen Differentialausdruck als vorderen gemeinsamen Teiler haben. Dann ist die Ordnung ihres vorderen kleinsten gemeinsamen Vielfachen gleich der Summe der Ordnungen von G_1 und G_2 , wie sich aus dem in Anmerkung ¹⁸⁾ angegebenen Resultat durch Übergang zu den adjungierten Differentialausdrücken nach dem Frobeniusschen Satze ergibt.

²¹⁾ Aus diesem Theorem und den Anmerkungen ¹⁸⁾ und ²⁰⁾ folgt im besonderen, daß man in den Sätzen III und IV der § 4 und 5 statt von dem hinteren kleinsten gemeinsamen Vielfachen zweier hinten teilerfremden Differentialausdrücke auch von dem vorderen kleinsten gemeinsamen Vielfachen zweier vorn teilerfremden Differentialausdrücke sprechen kann, die gleichwertig für die zwei hinten teilerfremden treten.

gemeinsames Vielfaches von k vorn völlig teilerfremden Differentialausdrücken $G_1, G_2, \dots, G_k$ auffassen, und es gilt auch das Umgekehrte. Die Begleitmatrix $\mathfrak{B}^*$ eines solchen Differentialausdruckes B läßt sich immer, was für sie charakteristisch ist, transformieren in eine zerfallende Matrix $\{\mathfrak{F}_{11}, \mathfrak{F}_{22}, \dots, \mathfrak{F}_{kk}\}$, wobei $\mathfrak{F}_{11}, \mathfrak{F}_{22}, \dots, \mathfrak{F}_{kk}$ als die Begleitmatrizen sowohl derjenigen Differentialausdrücke $F_1, F_2, \dots, F_k$ gewählt werden können, deren hinteres kleinstes gemeinsames Vielfache der Differentialausdruck B ist, als auch derjenigen $G_1, G_2, \dots, G_k$, deren vorderes kleinstes gemeinsames Vielfaches B ist.

Der Differentialausdruck B sei das hintere kleinste gemeinsame Vielfache der k Differentialausdrücke $F_1, F_2, \dots, F_k$, die nach Voraussetzung hinten völlig teilerfremd sein sollen. Wir bilden dann die k hinteren kleinsten gemeinsamen Vielfachen P_i der $k-1$ Differentialausdrücke $F_1, F_2, \dots, F_{i-1}, F_{i+1}, F_{i+2}, \dots, F_k$, wobei i die Werte $1, 2, \dots, k$ durchläuft. Dann ist B als hinteres kleinstes gemeinsames Vielfaches von $F_1, F_2, \dots, F_k$ auch durch jedes hintere kleinste gemeinsame Vielfache P_i von je $k-1$ der genannten k Differentialausdrücke hinten teilbar. Dies liefert für den Differentialausdruck B die folgenden Zerlegungen: $B = G_1 P_1, B = G_2 P_2, \dots, B = G_k P_k$, die besagen, daß B ein vorderes gemeinsames Vielfaches der Differentialausdrücke $G_1, G_2, \dots, G_k$ ist. Um zu beweisen, daß B ein vorderes kleinstes gemeinsames Vielfaches der zuletzt auftretenden Differentialausdrücke ist, verfahren wir so: Wir bilden ein vorderes kleinstes gemeinsames Vielfaches V von $G_1, G_2, \dots, G_k$ ²²⁾. Aus der Definition von V ergeben sich Zerlegungen $V = G_1 V_1, V = G_2 V_2, \dots, V = G_k V_k$, die die vordere Teilbarkeit von V durch $G_1, G_2, \dots, G_k$ ausdrücken. Da V vorderes kleinstes gemeinsames Vielfaches, B vorderes Vielfaches von $G_1, G_2, \dots, G_k$ ist, erhält man nach unserem Hilfssatz eine Relation $B = VT$. Mithin gewinnt man Zerlegungen $B = G_1 V_1 T = G_2 V_2 T = \dots = G_k V_k T$. Es war $B = G_1 P_1 = G_2 P_2 = \dots = G_k P_k$. Folglich ergibt sich $P_1 = V_1 T, P_2 = V_2 T, \dots, P_k = V_k T$. Aus der Definition von $P_1, P_2, \dots, P_k$ als hintere kleinste gemeinsame Vielfache von je $k-1$ der k hinten völlig teilerfremden Differentialausdrücke $F_1, F_2, \dots, F_k$ folgt, daß T eine bloße Funktion von x ist. Offenbar kann nämlich B auch als hinteres kleinstes gemeinsames Vielfaches von je zwei Differentialausdrücken P_i und P_j aufgefaßt werden, wo i und j irgendwelche verschiedene Zahlen aus der Reihe $1, 2, \dots, k$ bedeuten. Wir definieren dann P_{ij} als hinteres kleinstes gemeinsames Vielfaches der $k-2$ Differentialausdrücke, die sich aus $F_1, F_2, \dots, F_k$ ergeben, wenn man irgend zwei verschiedene derselben F_i

²²⁾ Ein solches existiert immer. Es ist der adjungierte Differentialausdruck zu dem hinteren kleinsten gemeinsamen Vielfachen von $\hat{G}_1, \hat{G}_2, \dots, \hat{G}_k$.

und F_j fortläßt. Da jeder der Differentialausdrücke $F_1, F_2, \dots, F_{i-1}, F_{i+1}, \dots, F_{j-1}, F_{j+1}, \dots, F_k$ sowohl P_i als auch P_j hinten teilt, ist P_{ij} hinterer gemeinsamer Teiler von P_i und P_j . Hätten P_i und P_j einen hinteren größeren gemeinsamen Teiler als P_{ij} , so hätte das hintere kleinste gemeinsame Vielfache B von P_i und P_j im Widerspruch mit der Voraussetzung eine niedrigere Ordnung, als die Summe der Ordnungen von $F_1, F_2, \dots, F_k$ ergibt. Da T hinterer gemeinsamer Teiler von P_i und P_j ist, teilt T auch ihren hinteren größten gemeinsamen Teiler P_{ij} . Mithin ist T hinterer Teiler aller hinteren kleinsten gemeinsamen Vielfachen von je $k-2$ der k Differentialausdrücke $F_1, F_2, \dots, F_k$. Da B dann weiter offenbar auch als hinteres kleinstes gemeinsames Vielfaches von P_{ij}, P_{il}, P_{jl} aufgefaßt werden kann, wo i, j, l irgend drei verschiedene Zahlen der Reihe $1, 2, \dots, k$ bedeuten, so folgt aus der über die Ordnung von B gemachten Voraussetzung, daß der hintere größte gemeinsame Teiler von P_{ij}, P_{il}, P_{jl} das hintere kleinste gemeinsame Vielfache der $k-3$ Differentialausdrücke ist, die sich aus $F_1, F_2, \dots, F_k$ bei Fortlassen von F_i, F_j, F_l ergeben. T erweist sich demnach als ein hinterer Teiler aller hinteren kleinsten gemeinsamen Vielfachen von je $k-3$ der Differentialausdrücke $F_1, F_2, \dots, F_k$. So fortfahrend findet man schließlich, daß T alle Differentialausdrücke $F_1, F_2, \dots, F_k$ selbst hinten teilt. Hätten $F_1, F_2, \dots, F_k$ einen hinteren gemeinsamen Teiler T , der eine wirkliche Differentialfunktion wäre, so würde ihr hinteres kleinstes gemeinsames Vielfaches B eine niedrigere Ordnung als die Summe der Ordnungen von $F_1, F_2, \dots, F_k$ besitzen. Aus diesem Widerspruch gegen die Voraussetzung folgt, daß T eine bloße Funktion von x ist, also $B = VT$ sich von dem vorderen kleinsten gemeinsamen Vielfachen von $G_1, G_2, \dots, G_k$ nur um eine bloße Funktion von x als hinteren Faktor unterscheidet. Mithin ist B selbst vorderes kleinstes gemeinsames Vielfaches von $G_1, G_2, \dots, G_k$. Aus den Relationen $B = G_1 P_1 = G_2 P_2 = \dots = G_k P_k$ und der Definition von $P_1, P_2, \dots, P_k$ folgt noch, daß $G_1, G_2, \dots, G_k$ die Ordnungen von $F_1, F_2, \dots, F_k$ besitzen. Mithin ist die Ordnung von B gleich der Summe der Ordnungen der vorderen Teiler $G_1, G_2, \dots, G_k$, und die genannten k Differentialausdrücke sind als vorn völlig teilerfremd zu bezeichnen. Hiermit ist gezeigt, daß aus der Darstellbarkeit von B als hinteres kleinstes gemeinsames Vielfaches von k hinten völlig teilerfremden Differentialausdrücken $F_1, F_2, \dots, F_k$ stets auch die Darstellbarkeit von B als vorderes kleinstes gemeinsames Vielfaches von k vorn völlig teilerfremden Differentialausdrücken $G_1, G_2, \dots, G_k$ folgt. Wird umgekehrt B als vorderes kleinstes gemeinsames Vielfaches von k vorn völlig teilerfremden Differentialausdrücken vorausgesetzt, so operiere man mit $\hat{B}$, das dann hinteres kleinstes gemeinsames Vielfaches von k hinten völlig teilerfremden Differentialausdrücken ist. Nach dem zuletzt gegebenen Beweise

ist B auch noch vorderes kleinstes gemeinsames Vielfaches von k vorn völlig teilerfremden Differentialausdrücken, und mithin läßt sich B als hinteres kleinstes gemeinsames Vielfaches von k hinten völlig teilerfremden Differentialausdrücken auffassen.

Um unseren Hauptsatz II' völlig zu beweisen, benützen wir noch den Begriff, daß zwei Differentialausdrücke gegenseitig von derselben Art sind und das hierfür gültige Theorem, womit wir uns erst im § 9 beschäftigen. Wir betrachten die oben aufgetretene Zerlegung $B = G_1 P_1$ und beachten, daß F_1 und G_1 die gleiche Ordnung besitzen, F_1 und P_1 hinten teilerfremd sind und B durch F_1 hinten teilbar ist. Dann bezeichnet man F_1 und G_1 als gegenseitig von derselben Art, und es können nach Satz VIII im § 9 die Begleitmatrizen von F_1 und G_1 gegenseitig ineinander transformiert werden. Entsprechendes gilt für die Differentialausdrücke $F_2, F_3, \dots, F_k$ bzw. $G_2, G_3, \dots, G_k$ und ihre Begleitmatrizen, wie sich aus den Zerlegungen $B = G_i P_i$ ($i = 2, 3, \dots, k$) ergibt. Mithin läßt sich im Hauptsatze II jede der Matrizen $\mathfrak{F}_{i,i}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, k$) sowohl durch die Begleitmatrix von F_i als auch durch die von G_i ersetzen. Hiermit sind alle in II' vorliegenden Aussagen völlig bewiesen.

§ 7.

Vollständig reduzible Differentialausdrücke und ihre Begleitmatrizen.

Aus den Sätzen I und II der §§ 1 und 2 ergibt sich unmittelbar die folgende wichtige Bemerkung: *Notwendig und hinreichend, damit ein linearer homogener Differentialausdruck irreduzibel ist, erweist sich die Irreduzibilität seiner Begleitmatrix, d. h. die Unmöglichkeit ihrer Transformation in die Form*

$$\begin{array}{cc} \mathfrak{F}_{11} & 0 \\ \mathfrak{F}_{21} & \mathfrak{F}_{22} \end{array}.$$

Wir wenden uns nun zur Betrachtung *vollständig reduzibler Differentialausdrücke*. Einen Differentialausdruck B habe ich vollständig reduzibel genannt, wenn man k irreduzible Differentialausdrücke $J_1, J_2, \dots, J_k$ finden kann, so daß B der Differentialausdruck niedrigster Ordnung ist, der durch jeden der Differentialausdrücke $J_1, J_2, \dots, J_k$ hinten teilbar ist und B die Summe der Ordnungen von $J_1, J_2, \dots, J_k$ zur Ordnung hat²³⁾. Aus den Hauptsätzen II und II' des vorigen Paragraphen und der an der Spitze dieses Paragraphen befindlichen Bemerkung folgt der

²³⁾ Den Begriff des vollständig reduziblen Differentialausdruckes habe ich in der in Anmerkung ²⁾ genannten Arbeit, Math. Annalen, 62 (1906), S. 95 eingeführt. Man braucht übrigens bei der Definition nicht, wie im Text geschehen, vorauszusetzen, daß $J_1, J_2, \dots, J_k$ hinten völlig teilerfremd sind. Ist nämlich B hinteres kleinstes

Satz V. *Notwendig und hinreichend, daß ein Differentialausdruck B vollständig reduzibel ist, erweist sich, daß seine Begleitmatrix vollständig reduzibel ist, d. h. von derselben Art ist mit einer zerfallenden Matrix*

$$\left\| \begin{array}{cccc} \mathfrak{J}_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathfrak{J}_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{J}_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathfrak{J}_{kk} \end{array} \right\|,$$

bei der $\mathfrak{J}_{11}, \mathfrak{J}_{22}, \dots, \mathfrak{J}_{kk}$ irreduzible Matrizen sind. Man kann $\mathfrak{J}_{11}, \mathfrak{J}_{22}, \dots, \mathfrak{J}_{kk}$ stets als Begleitmatrizen derjenigen hinten teilerfremden irreduziblen Differentialausdrücke wählen, als deren hinteres kleinstes gemeinsames Vielfaches sich der Differentialausdruck B darstellen läßt.

Der vollständig reduzible Differentialausdruck B läßt sich stets auch als vorderes kleinstes gemeinsames Vielfaches von k vorn völlig teilerfremden irreduziblen Differentialausdrücken darstellen, und man kann für $\mathfrak{J}_{11}, \mathfrak{J}_{22}, \dots, \mathfrak{J}_{kk}$ auch die Begleitmatrizen dieser Differentialausdrücke wählen.

Der Vollständigkeit wegen gehe ich hier noch kurz auf eine besondere Klasse von vollständig reduziblen Differentialausdrücken ein. Früher habe ich den Nachweis geführt²⁴⁾, daß ein vollständig reduzibler linearer homogener Differentialausdruck entweder nur auf eine einzige oder auf unendlich viele Weisen hinteres kleinstes gemeinsames Vielfaches irreduzibler linearer homogener Differentialausdrücke ist. Im letzteren Fall sind mindestens zwei der irreduziblen Differentialausdrücke, deren kleinstes gemeinsames Vielfaches der Differentialausdruck ist, gegenseitig von derselben Art. Wird nun der in § 9 behandelte Satz vorausgesetzt, daß für Differentialausdrücke derselben Art die Transformierbarkeit ihrer Begleitmatrizen ineinander charakteristisch ist, so ergibt sich

Satz VI. *Notwendig und hinreichend, damit ein vollständig reduzibler Differentialausdruck auf mehr als eine und daher auf unendlich viele Weisen hinteres kleinstes gemeinsames Vielfaches irreduzibler linearer homogener Differentialausdrücke ist, erweist sich, daß seine Begleitmatrix von derselben Art ist mit einer zerfallenden Matrix $\{\mathfrak{J}_{11}, \mathfrak{J}_{22}, \dots, \mathfrak{J}_{kk}\}$, bei der man mindestens zwei der irreduziblen Matrizen $\mathfrak{J}_{11}, \mathfrak{J}_{22}, \dots, \mathfrak{J}_{kk}$ übereinstimmend wählen kann.*

gemeinsames Vielfaches irreduzibler Differentialausdrücke, so kann man stets auch k hinten völlig teilerfremde irreduzible Differentialausdrücke finden, so daß die Ordnung von B gleich der Summe ihrer Ordnungen ist. Vgl. die in Anmerkung *) genannte Dissertation von Blumberg (1912), S. 32.

²⁴⁾ Vgl. die in Anmerkung *) genannte Arbeit, Math. Annalen, 62 (1906), S. 106.

§ 8.

Die Zerlegung eines Differentialausdruckes in irreduzible bzw. aufeinanderfolgende vordere bzw. aufeinanderfolgende hintere größte vollständig reduzible Faktoren zieht eine entsprechende Zerlegung der Begleitmatrix nach sich.

Von den vollständig reduziblen Differentialausdrücken und ihren Begleitmatrizen gehen wir wieder zu beliebigen linearen homogenen Differentialausdrücken über.

Hat man einen linearen homogenen Differentialausdruck, so kann man für ihn die folgenden drei Zerlegungen studieren: in irreduzible Faktoren, in aufeinanderfolgende vordere größte vollständig reduzible Faktoren und in aufeinanderfolgende hintere größte vollständig reduzible Faktoren²⁶⁾. Es gilt nun folgender

Satz VII. *Notwendig und hinreichend, damit die Zerlegung $B = B_1 B_2 \dots B_k$ des linearen homogenen Differentialausdruckes eine solche in irreduzible Faktoren bzw. in aufeinanderfolgende vordere größte vollständig reduzible Faktoren bzw. in aufeinanderfolgende hintere größte vollständig reduzible Faktoren ist, erweist sich, daß die Begleitmatrix von B transformiert werden kann in die Matrix*

$$\overline{B}: \left\| \begin{array}{cccccc} \mathfrak{B}_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathfrak{B}_{21} & \mathfrak{B}_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \mathfrak{B}_{31} & \mathfrak{B}_{32} & \mathfrak{B}_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \mathfrak{B}_{k1} & \mathfrak{B}_{k2} & \mathfrak{B}_{k3} & \dots & \mathfrak{B}_{kk} \end{array} \right\|,$$

bei der $\mathfrak{B}_{11}, \mathfrak{B}_{22}, \mathfrak{B}_{33}, \dots, \mathfrak{B}_{kk}$ irreduzible bzw. aufeinanderfolgende vordere größte vollständig reduzible bzw. aufeinanderfolgende hintere größte vollständig reduzible Matrizen bedeuten, die der Reihe nach mit den Begleitmatrizen von $B_1, B_2, \dots, B_k$ von derselben Art sind.

Der Beweis für die Zerlegung in irreduzible Bestandteile folgt unmittelbar aus dem Hauptsatz I des § 3 und der Bemerkung über die Begleitmatrix irreduzibler Differentialausdrücke zu Beginn des § 7. Beim Beweise der zwei anderen Fälle wird es genügen, sich auf die Zerlegung in aufeinanderfolgende vordere größte vollständig reduzible Differentialausdrücke zu beschränken. $B = B_1 B_2 \dots B_k$ sei demnach eine solche, d. h. B_1 sei ein vollständig reduzibler Differentialausdruck von höchstmöglicher Ordnung, der B vorn teilt, B_2 sei ein vollständig reduzibler Differentialausdruck von höchstmöglicher Ordnung, der $B_2 B_3 \dots B_k$ vorn

²⁶⁾ Vgl. die Anmerkungen 7) bis 12).

teilt und so weiter. Nach dem Hauptsatz I kann man die Begleitmatrix $\mathfrak{B}^*$ von B in die Form der Matrix $\mathfrak{B}$ transformieren, so daß stets die Begleitmatrix von B_i mit der Matrix B_{ii} ($i = 1, 2, \dots, k$) und die Begleitmatrix von $B_i B_{i+1} \dots B_k$ ($i = 2, 3, \dots, k$) mit der Matrix

$$\begin{array}{cccc} \mathfrak{B}_{ii} & 0 & \dots & 0 \\ \mathfrak{B}_{i+1,i} & \mathfrak{B}_{i+1,i+1} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ \mathfrak{B}_{ki} & \mathfrak{B}_{k,i+1} & \dots & \mathfrak{B}_{kk} \end{array}$$

von derselben Art werden. Dabei ergibt sich, daß $\mathfrak{B}_{11}, \mathfrak{B}_{22}, \dots, \mathfrak{B}_{kk}$ nach Satz V vollständig reduzible Matrizen sind. Es ist noch zu zeigen, daß $\mathfrak{B}_{11}, \mathfrak{B}_{22}, \dots, \mathfrak{B}_{kk}$ aufeinanderfolgende vordere *größte* vollständig reduzible Teilmatrizen von $\mathfrak{B}$ sind. Angenommen $\mathfrak{B}_{11}$ wäre nicht die erste vordere größte vollständig reduzible Teilmatrix von $\mathfrak{B}$, sondern $\mathfrak{B}$ ließe sich in eine Matrix $\overline{\mathfrak{B}}$

$$\overline{\mathfrak{B}}: \begin{array}{ccc} \mathfrak{B}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{C}_{11} & 0 \\ \mathfrak{C}_{21} & \mathfrak{C}_{22} & \mathfrak{C}_{23} \end{array}$$

transformieren, wobei $\mathfrak{C}_{11}$ eine irreduzible Matrix bedeutet. Dann würde aus dem Hauptsatz I des § 3 eine Zerlegung $B = C_1 C_2$ folgen, so daß die Begleitmatrix von C_1 von derselben Art mit der Matrix

$$\left\| \begin{array}{cc} \mathfrak{B}_{11} & 0 \\ 0 & \mathfrak{C}_{11} \end{array} \right\|$$

wäre; mithin hätte C_1 höhere Ordnung als B_1 . Die letzte Matrix ist aber infolge der vollständigen Reduzibilität von $\mathfrak{B}_{11}$ und der Irreduzibilität von $\mathfrak{C}_{11}$ auch noch vollständig reduzibel. Mithin ist nach Satz V der Differentialausdruck C_1 , der B vorn teilen soll, vollständig reduzibel. Unsere Annahme, daß $\mathfrak{B}_{11}$ nicht die erste größte vollständig reduzible Teilmatrix von $\mathfrak{B}$ ist, befindet sich also im Widerspruch mit unserer Voraussetzung, daß B_1 ein vollständig reduzibler Differentialausdruck von der höchsten möglichen Ordnung ist, der B vorn teilt. $\mathfrak{B}_{11}$ ist mithin die erste vordere größte vollständig reduzible Teilmatrix von $\mathfrak{B}$. So fortfahrend zeigt man, daß, da die Begleitmatrix von $B_2 B_3 \dots B_k$ mit der Matrix

$$\begin{array}{cccc} \mathfrak{B}_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathfrak{B}_{32} & \mathfrak{B}_{33} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \mathfrak{B}_{k2} & \mathfrak{B}_{k3} & \mathfrak{B}_{k4} & \dots & \mathfrak{B}_{kk} \end{array}$$

von derselben Art ist, $\mathfrak{B}_{22}, \mathfrak{B}_{33}$ usw. die zweite, dritte usw. vordere größte vollständig reduzible Teilmatrix von $\mathfrak{B}$ sind.

Werden umgekehrt $\mathfrak{B}_{11}, \mathfrak{B}_{22}, \dots, \mathfrak{B}_{kk}$ als aufeinanderfolgende vordere größte vollständig reduzierte Teilmatrizen von $\mathfrak{B}$ vorausgesetzt, so ergibt sich, indem man das obige Beweisverfahren umgekehrt durchläuft, daß man eine Zerlegung $B = B_1 B_2 \dots B_k$ des Differentialausdruckes B in aufeinanderfolgende vordere größte vollständig reduzierte Faktoren erhält bei der die Begleitmatrizen von $B_1, B_2, \dots, B_k$ mit den Teilmatrizen $\mathfrak{B}_{11}, \mathfrak{B}_{22}, \dots, \mathfrak{B}_{kk}$ von derselben Art sind.

Der Beweis für die Zerlegung des Differentialausdruckes $B = B_1 B_2 \dots B_k$ in aufeinanderfolgende hintere größte vollständig reduzierte Faktoren wird genau entsprechend geführt.

§ 9.

Differentialausdrücke, von denen der eine vorn bzw. hinten in dem durch einen zweiten Differentialausdruck bestimmten Art enthalten sind, haben entsprechende Begleitmatrizen.

Während sich die bisherige Literatur unter Vernachlässigung des vorderen kleinsten gemeinsamen Vielfachen nur mit dem hinteren beschäftigt hat, liegt es bei dem Begriff des Enthaltenseins eines linearen homogenen Differentialausdruckes in der Art des anderen umgekehrt. Man ist bisher hier nur auf das vordere Enthaltensein geführt worden, mit dessen Definition ich auch und zwar in folgender Form beginne²⁶⁾:

Definition I. *Den Differentialausdruck*

$$B \equiv \beta_1 z + \beta_2 \frac{dz}{dx} + \beta_3 \frac{d^2 z}{dx^2} + \dots + \beta_{m+1} \frac{d^m z}{dx^m} \quad (\beta_{m+1} \neq 0)$$

m-ter Ordnung ($m \leq n$) nenne ich in der durch den Differentialausdruck

$$A = \alpha_1 z + \alpha_2 \frac{dz}{dx} + \alpha_3 \frac{d^2 z}{dx^2} + \dots + \alpha_{n+1} \frac{d^n z}{dx^n} \quad (\alpha_{n+1} \neq 0)$$

n-ter Ordnung bestimmter Art vorn enthalten, wenn man einen Differentialausdruck

²⁶⁾ Die Bezeichnung derselben Art stammt für $m = n$ von Poincaré, Mémoire sur les fonctions zétaphuchsienues, Acta mathematica, 5 (1884), S. 212. Der Begriff derselben Art wurde von ihm unter Voraussetzung der Integralexistenz der Differentialgleichungen $A = 0$ und $B = 0$ eingeführt; entsprechend habe ich den Fall $m < n$ in meinem Aufsatz: Über reduzierte lineare homogene Differentialgleichungen, Math. Annalen, 56 (1902), S. 554 behandelt. Hier ist der Artbegriff losgelöst von der Integralexistenz definiert, wobei wesentlich ist, daß BP das hintere kleinste gemeinsame Vielfache von A und P ist. Für den speziellen Fall $m = n$ vgl. meinen in Anmerkung *) genannten Aufsatz, Math. Annalen, 72 (1912), S. 205 sowie die ebenda zitierte Dissertation von Blumberg, S. 25.

$$P \equiv p_{11}z + p_{12} \frac{dz}{dx} + \dots + p_{1,n-1} \frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}} + p_{1n} \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} \quad 27)$$

mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche $\sum$ finden kann, so daß das symbolische Produkt BP der linearen homogenen Differentialausdrücke B und P durch den Differentialausdruck A hinten teilbar ist und dabei BP das hintere kleinste gemeinsame Vielfache von A und P darstellt.

Ich wende mich nun zum Beweise des folgenden

Satzes VIII²⁸⁾. *Notwendig und hinreichend, damit der Differentialausdruck B m -ter Ordnung*

$$B \equiv \beta_1 z + \beta_2 \frac{dz}{dx} + \dots + \beta_m \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + \beta_{m+1} \frac{d^m z}{dx^m} \quad (m \geq 1, \beta_{m+1} \neq 0)$$

in der durch den Differentialausdruck A n -ter Ordnung

$$A \equiv \alpha_1 z + \alpha_2 \frac{dz}{dx} + \dots + \alpha_n \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \alpha_{n+1} \frac{d^n z}{dx^n} \quad (n \geq 1, \alpha_{n+1} \neq 0)$$

bestimmten Art vorn enthalten ist, erweist sich, daß die Begleitmatrix

$$\mathfrak{B}^*: \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ \frac{\beta_1}{\beta_{m+1}} & \frac{\beta_2}{\beta_{m+1}} & \frac{\beta_3}{\beta_{m+1}} & \dots & \frac{\beta_{m-1}}{\beta_{m+1}} & \frac{\beta_m}{\beta_{m+1}} \end{array} \right\|$$

von B in der durch die Begleitmatrix

$$\mathfrak{A}^*: \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ \frac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}} & \frac{\alpha_2}{\alpha_{n+1}} & \frac{\alpha_3}{\alpha_{n+1}} & \dots & \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \end{array} \right\|$$

²⁷⁾ Bei P soll die Zahl $n-1$ nur eine obere Grenze für die Ordnung bedeuten. Im Gegensatz zu A und B braucht P nicht einmal ein wirklicher Differentialausdruck zu sein; nur eine der Größen $p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1n}$ muß ungleich Null sein.

²⁸⁾ Diesen auch für $m=n$ neuen Satz habe ich schon angegeben in dem Aufsatz: Über lineare homogene Differentialsysteme und ihre Sequenten, Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1913, Abhandlung 17, S. 7. Der Satz wird hier erstmalig bewiesen.

von A bestimmten Art als vorderer Bestandteil enthalten ist. Dies besagt²⁹⁾: Es existiert eine Matrix $\mathfrak{P}$

$$\mathfrak{P}: \left\| \begin{array}{cccc} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & & & \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\|$$

vom Range m mit Elementen p_{ik} aus dem Rationalitätsbereiche $\sum$, so daß die Gleichung zwischen quadratischen Matrizen

$$(86) \quad \mathfrak{B}_n \mathfrak{P} = -\mathfrak{P}' + \mathfrak{P} \mathfrak{A}^*$$

besteht; hierbei bedeutet $\mathfrak{P}'$ die durch Differentiation der Elemente p_{ik} aus $\mathfrak{P}$ hervorgehende Matrix und $\mathfrak{B}_n$ die sich aus $\mathfrak{B}^*$ ergebende Matrix, indem man $\mathfrak{B}^*$ rechts $n-m$ Spalten und unten $n-m$ Zeilen mit Nullen beifügt.

Wir beweisen zuerst, daß, wenn die Matrizenrelation (86) stattfindet, tatsächlich der Differentialausdruck B in der durch A bestimmten Art enthalten ist, also die Definition I zutrifft. Nach Voraussetzung existiert eine Matrix $\mathfrak{P}$ des Ranges m mit den $m \cdot n$ Elementen p_{ik} ($i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n$) aus dem Rationalitätsbereich $\sum$. Zu diesen $m \cdot n$ Größen führen wir durch Definition die weiteren n Größen

$$(87) \quad p_{m+1,k} = -\frac{\beta_1}{\beta_{m+1}} p_{1k} - \frac{\beta_2}{\beta_{m+1}} p_{2k} - \dots - \frac{\beta_m}{\beta_{m+1}} p_{mk} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

ein. Dann nimmt die Matrix $\mathfrak{B}_n \mathfrak{P}$, wie die Ausrechnung lehrt, den Wert an:

$$\mathfrak{B}_n \mathfrak{P}: \left\| \begin{array}{cccc} -p_{11} & -p_{21} & \dots & -p_{2n} \\ -p_{31} & -p_{32} & \dots & -p_{3n} \\ \vdots & & & \\ -p_{m+1,1} & -p_{m+1,2} & \dots & -p_{m+1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\|$$

Da diese Matrix nach (86) den Wert $-\mathfrak{P}' + \mathfrak{P} \mathfrak{A}^*$ besitzt, ergibt sich das Gleichungssystem

²⁹⁾ Vgl. wegen dieser Definition den in Anmerkung ³⁾ zitierten Aufsatz, Math. Annalen, 78 (1917), S. 44 a. a. O. Gleichung (45).

$$(87^*) \quad p_{i+1,k} = p'_{ik} + p_{ik-1} - p_{in} \frac{\alpha_k}{\alpha_{n+1}} \quad (i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n),$$

wobei $p_{i0} = 0$ ist. Wir führen m Linearfunktionen $z_1, z_2, \dots, z_{m+1}$ von n Unbestimmten $y_1, y_2, \dots, y_n$ ein und setzen:

$$(88) \quad \begin{aligned} z_1 &= p_{11}y_1 & + p_{12}y_2 & + \dots + p_{1n}y_n, \\ z_2 &= p_{21}y_1 & + p_{22}y_2 & + \dots + p_{2n}y_n, \\ &\vdots \\ z_m &= p_{m1}y_1 & + p_{m2}y_2 & + \dots + p_{mn}y_n, \\ z_{m+1} &= p_{m+1,1}y_1 + p_{m+1,2}y_2 + \dots + p_{m+1,n}y_n. \end{aligned}$$

Da die Matrix $\mathfrak{P}$ den Rang m hat, sind die Funktionen $z_1, z_2, \dots, z_m$ linear unabhängig; bestände nämlich eine Relation $f_1 z_1 + f_2 z_2 + \dots + f_m z_m = 0$, so hätte die Matrix $\mathfrak{P}$ im Widerspruch mit der Voraussetzung einen kleineren Rang als m . Hingegen sind $z_1, z_2, \dots, z_{m+1}$ in linearer Dependenz, da aus den Gleichungen (87) die Relation

$$(89) \quad \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \dots + \beta_m z_m + \beta_{m+1} z_{m+1} = 0$$

folgt.

Nach Formel (87*) schreiben wir

$$z_{i+1} = p_{i+1,1}y_1 + p_{i+1,2}y_2 + \dots + p_{i+1,n}y_n \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

in der Form

$$\begin{aligned} z_{i+1} &= p'_{i1}y_1 + p'_{i2}y_2 + \dots + p'_{in}y_n + p_{i1}y_2 + p_{i2}y_3 + \dots + p_{i,n-1}y_n \\ &\quad - p_{in} \frac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}} y_1 - p_{in} \frac{\alpha_2}{\alpha_{n+1}} y_2 - \dots - p_{in} \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} y_n \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} z_{i+1} &= \frac{dz_i}{dx} - p_{i1} \frac{dy_1}{dx} - p_{i2} \frac{dy_2}{dx} - \dots - p_{in} \frac{dy_n}{dx} + p_{i1}y_2 + p_{i2}y_3 + \dots \\ &\quad + p_{i,n-1}y_n - p_{in} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}} y_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_{n+1}} y_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} y_n \right) \\ &= \frac{dz_i}{dx} - p_{i1} \left(\frac{dy_1}{dx} - y_2 \right) - p_{i2} \left(\frac{dy_2}{dx} - y_3 \right) - \dots - p_{i,n-1} \left(\frac{dy_{n-1}}{dx} - y_n \right) \\ &\quad - \frac{p_{in}}{\alpha_{n+1}} \left(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n + \alpha_{n+1} \frac{dy_n}{dx} \right), \end{aligned}$$

also

$$(90) \quad \begin{aligned} \frac{dz_i}{dx} &= z_{i+1} + p_{i1} \left(\frac{dy_1}{dx} - y_2 \right) + p_{i2} \left(\frac{dy_2}{dx} - y_3 \right) + \dots + p_{i,n-1} \left(\frac{dy_{n-1}}{dx} - y_n \right) \\ &\quad + \frac{p_{in}}{\alpha_{n+1}} \left(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n + \alpha_{n+1} \frac{dy_n}{dx} \right). \end{aligned}$$

Wendet man Formel (90) für $i = 1$ an und differenziert sie, indem man rechterhand die gleiche Formel für $i = 2, 3, \dots, m$ benützt, so gewinnt man das Gleichungssystem

$$(91) \quad \frac{dz_1}{dx} = z_2 + L_1, \quad \frac{d^2 z_1}{dx^2} = z_3 + L_2, \quad \frac{d^3 z_1}{dx^3} = z_4 + L_3, \dots, \quad \frac{d^m z_1}{dx^m} = z_{m+1} + L_m;$$

hierbei bedeuten $L_1, L_2, \dots, L_m$ lineare homogene Funktionen von

$$\frac{dy_1}{dx} - y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} - y_3, \dots, \quad \frac{dy_{n-1}}{dx} - y_n, \\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n + \alpha_{n+1} \frac{dy_n}{dx}$$

und von ihren Abgeleiteten. Wir betrachten jetzt den Ausdruck

$$(92) \quad \beta_1 (p_{11} y_1 + p_{12} y_2 + \dots + p_{1n} y_n) + \beta_2 \frac{d}{dx} (p_{11} y_1 + p_{12} y_2 + \dots + p_{1n} y_n) \\ + \beta_3 \frac{d^2}{dx^2} (p_{11} y_1 + p_{12} y_2 + \dots + p_{1n} y_n) + \dots \\ + \beta_{m+1} \frac{d^m}{dx^m} (p_{11} y_1 + p_{12} y_2 + \dots + p_{1n} y_n),$$

der sich auch

$$\beta_1 z_1 + \beta_2 \frac{dz_1}{dx} + \beta_3 \frac{d^2 z_1}{dx^2} + \dots + \beta_{m+1} \frac{d^m z_1}{dx^m}$$

schreiben läßt und demnach, wie aus (91) folgt, die Form

$$(93) \quad \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \beta_3 z_3 + \dots + \beta_{m+1} z_{m+1} + \beta_2 L_1 + \beta_3 L_2 + \dots + \beta_{m+1} L_m$$

besitzt. Hierbei sind

$L_1, L_2, \dots, L_m$, also auch $\beta_2 L_1 + \beta_3 L_2 + \dots + \beta_{m+1} L_m$ lineare homogene Funktionen von

$$\frac{dy_1}{dx} - y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} - y_3, \dots, \quad \frac{dy_{n-1}}{dx} - y_n, \quad \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n + \alpha_{n+1} \frac{dy_n}{dx}$$

und deren Abgeleiteten. Infolge der Relation (89) wird der Ausdruck (93) gleich $\beta_2 L_1 + \beta_3 L_2 + \dots + \beta_{m+1} L_m$.

Wir ersetzen nunmehr die unbestimmten Funktionen $y_1, y_2, \dots, y_n$ durch eine willkürliche Funktion y und deren Abgeleitete. Dann geht nach der Symbolik der linearen homogenen Differentialausdrücke die linke Seite von (92) über in BP , wobei B der lineare homogene Differentialausdruck

$$\beta_1 y + \beta_2 \frac{dy}{dx} + \dots + \beta_{m+1} \frac{d^m y}{dx^m}$$

und P der lineare homogene Differentialausdruck

$$p_{11} y + p_{12} \frac{dy}{dx} + \dots + p_{1n} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$$

ist; der rechts stehende Ausdruck $\beta_2 L_1 + \beta_3 L_2 + \dots + \beta_{m+1} L_m$ verwandelt sich bei diesem Ersetzen, da

$$\frac{dy_1}{dx} - y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} - y_3, \dots, \quad \frac{dy_{n-1}}{dx} - y_n$$

ull werden, in eine lineare homogene Funktion des Differentialausdruckes

$$A \equiv \alpha_1 y + \alpha_2 \frac{dy}{dx} + \dots + \alpha_{n+1} \frac{d^n y}{dx^n}$$

nd seiner Abgeleiteten, also in ein Produkt zweier Differentialausdrücke
er Form QA . Hiermit hat man $BP = QA$, d. h. BP ist durch A hinten
eilbar. Um noch zu zeigen, daß BP der Differentialausdruck niedrigster
rdnung ist, der durch P und A hinten teilbar ist, nehmen wir an, es
äbe einen Differentialausdruck TP , der ebenso wie BP durch A hinten
eilbar ist und dabei eine niedrigere Ordnung als BP besitzt. Es sei

$$T \equiv t_1 z + t_2 \frac{dz}{dx} + t_3 \frac{d^2 z}{dx^2} + \dots + t_{l+1} \frac{d^l z}{dx^l} \quad (l < m)^{30)}.$$

Bildet man nun

$$(94) \quad t_1(p_{11}y_1 + p_{12}y_2 + \dots + p_{1n}y_n) + t_2 \frac{d}{dx}(p_{11}y_1 + p_{12}y_2 + \dots + p_{1n}y_n) \\ + \dots + t_{l+1} \frac{d^l}{dx^l}(p_{11}y_1 + p_{12}y_2 + \dots + p_{1n}y_n),$$

o geht dieser Ausdruck entsprechend dem in den Formeln (92) und (93)
orliegenden Resultate über in

$$t_1(p_{11}y_1 + p_{12}y_2 + \dots + p_{1n}y_n) + t_2(p_{21}y_1 + p_{22}y_2 + \dots + p_{2n}y_n) \\ + \dots + t_{l+1}(p_{l+1,1}y_1 + p_{l+1,2}y_2 + \dots + p_{l+1,n}y_n) + M,$$

wobei M eine lineare homogene Funktion von

$$\frac{y_1}{x} - y_2, \frac{dy_2}{dx} - y_3, \dots, \frac{dy_{n-1}}{dx} - y_n, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n + \alpha_{n+1} \frac{dy_n}{dx}$$

nd deren Abgeleiteten ist. Ersetzt man $y_1, y_2, \dots, y_n$ durch eine willkür-
che Funktion y und ihre Abgeleiteten, so geht (94) nach der Symbolik
ir Differentialausdrücke über in TP , während der umgeformte Ausdruck
leich

$$\sum_{s=1}^{s=l+1} t_s \left(p_{s1} y + p_{s2} \frac{dy}{dx} + \dots + p_{sn} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right) + M_1$$

ird; hierbei bedeutet M_1 eine lineare homogene Funktion von

$$\alpha_1 y + \alpha_2 \frac{dy}{dx} + \alpha_3 \frac{d^2 y}{dx^2} + \dots + \alpha_n \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \alpha_{n+1} \frac{d^n y}{dx^n},$$

so des Differentialausdruckes A und seiner Abgeleiteten. Mithin ist
 $M_1 = Q_1 A$, wobei Q_1 einen linearen homogenen Differentialausdruck be-
eutet. Angenommen TP wäre ebenso wie BP durch A hinten teilbar,
an hätte also $TP = RA$. Alsdann würde durch Subtraktion dieser Re-
tion von der soeben für TP gefundenen folgen

³⁰⁾ Damit TP niedrigere Ordnung als BP hat, muß offenbar $l < m$ sein.

$$(95) \quad 0 = \sum_{s=1}^{s=l+1} t_s \left(p_{s1} y + p_{s2} \frac{dy}{dx} + p_{s3} \frac{d^2 y}{dx^2} + \dots + p_{sn} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right) + (Q_1 - R) A$$

Da A als Differentialausdruck n -ter Ordnung die n -te Abgeleitete $\frac{d^n y}{dx^n}$ enthält, während diese in dem ersten Summenausdruck von (95) nicht auftritt, muß $Q_1 - R = 0$ sein; folglich wird

$$\sum_{s=1}^{s=l+1} t_s \left(p_{s1} y + p_{s2} \frac{dy}{dx} + \dots + p_{sn} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right) = 0.$$

Da diese Relation für willkürliche y gilt, ergibt sich das Gleichungssystem

$$\sum_{s=1}^{s=l+1} t_s p_{s1} = 0, \quad \sum_{s=1}^{s=l+1} t_s p_{s2} = 0, \quad \dots, \quad \sum_{s=1}^{s=l+1} t_s p_{sn} = 0.$$

Diese Gleichungen besagen aber im Widerspruch mit der Voraussetzung, daß bereits die $l+1$ Funktionen $z_1, z_2, \dots, z_{l+1}$ ($l < m$) durch eine Relation $t_1 z_1 + t_2 z_2 + \dots + t_{l+1} z_{l+1} = 0$ verknüpft sind. Mithin ist unsere Annahme nicht zutreffend, und es ist gezeigt, daß BP der Differentialausdruck niedrigster Ordnung ist, der durch A hinten teilbar ist. Hiermit ist der Nachweis erbracht, daß der Differentialausdruck B als vorderer Bestandteil in der durch A bestimmten Art enthalten ist.

Umgekehrt sei nun voraussetzungsgemäß der Differentialausdruck B in der durch den Differentialausdruck A bestimmten Art als vorderer Bestandteil enthalten, d. h. es existiere ein Differentialausdruck

$$P \equiv p_{11} z + p_{12} \frac{dz}{dx} + p_{13} \frac{d^2 z}{dx^2} + \dots + p_{1n} \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}},$$

so daß BP hinten durch A teilbar ist und dabei das hintere kleinste gemeinsame Vielfache von A und P vorstellt. Der Differentialausdruck A lautet

$$A \equiv \alpha_1 y + \alpha_2 \frac{dy}{dx} + \dots + \alpha_{n+1} \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Wir bilden mit $p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1n}$ nach den Gleichungen (87*):

$$(87^*) \quad p_{i+1,k} = p'_{ik} + p_{ik-1} - p_{in} \frac{\alpha_k}{\alpha_{n+1}} \quad (i = 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots, n)$$

und führen $t+1$ lineare homogene Funktionen $z_1, z_2, \dots, z_{t+1}$ von den n Unbestimmten $y_1, y_2, \dots, y_n$ ein:

$$\begin{aligned} z_1 &= p_{11} y_1 + p_{12} y_2 + \dots + p_{1n} y_n, \\ z_2 &= p_{21} y_1 + p_{22} y_2 + \dots + p_{2n} y_n, \\ &\vdots \\ z_{t+1} &= p_{t+1,1} y_1 + p_{t+1,2} y_2 + \dots + p_{t+1,n} y_n. \end{aligned}$$

Die Zahl t bestimmen wir derart, daß $z_1, z_2, \dots, z_t$ linear unabhängig sind, während $z_1, z_2, \dots, z_{t+1}$ in linearer Dependenz stehen. Zwischen ihnen bestehe die Relation:

$$(96) \quad g_1 z_1 + g_2 z_2 + \dots + g_t z_t + z_{t+1} = 0,$$

wobei wir den Koeffizienten von z_{t+1} , der wegen der Unabhängigkeit von $z_1, z_2, \dots, z_t$ ungleich Null ist, gleich 1 gewählt haben. Da die Größen p_{ik} und α_i nach Voraussetzung dem Rationalitätsbereiche $\sum$ angehören, trifft es auch für $g_1, g_2, \dots, g_t$ zu. Wir bilden die Matrix

$$\mathfrak{P}: \quad \left\| \begin{array}{cccc} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ p_{t1} & p_{t2} & \dots & p_{tn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\|,$$

diese hat wegen der linearen Unabhängigkeit von $z_1, z_2, \dots, z_t$ den Rang t . Konstruiert man mittels der Begleitmatrix $\mathfrak{A}^*$, die zu dem Differentialausdruck A gehört, die Matrix $-\mathfrak{P}' + \mathfrak{P}\mathfrak{A}^*$, so lautet diese, wenn die Gleichungen (87*) benützt werden,

$$\left\| \begin{array}{cccc} -p_{21} & -p_{22} & \dots & p_{2n} \\ -p_{31} & -p_{32} & \dots & p_{3n} \\ \vdots & & & \\ -p_{t+1,1} & -p_{t+1,2} & \dots & p_{t+1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\|.$$

Wir führen noch die Begleitmatrix $\mathfrak{G}^*$ des linearen homogenen Differentialausdruckes

$$G \equiv g_1 z + g_2 \frac{dz}{dx} + g_3 \frac{d^2 z}{dx^2} + \dots + g_t \frac{d^{t-1} z}{dx^{t-1}} + \frac{d^t z}{dx^t}$$

ein und bilden $\mathfrak{G}_n \mathfrak{P}$; dabei bedeutet $\mathfrak{G}_n$ ana'og wie oben $\mathfrak{B}_n$ die durch Beifügen von Nullen aus $\mathfrak{G}^*$ hervorgehende Matrix n -ten Grades. Für $\mathfrak{G}_n \mathfrak{P}$ erhält man:

$$\mathfrak{G}_n \mathfrak{P}: \left\| \begin{array}{cccc} -p_{21} & -p_{22} & \dots & -p_{2n} \\ -p_{31} & -p_{32} & \dots & -p_{3n} \\ \vdots & & & \\ -p_{t1} & -p_{t2} & \dots & -p_{tn} \\ \sum_{s=1}^{s=t} g_s p_{s1} & \sum_{s=1}^{s=t} g_s p_{s2} & \dots & \sum_{s=1}^{s=t} g_s p_{sn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\|$$

Da $y_1, y_2, \dots, y_n$ Unbestimmte sind, ergibt sich aus (96) das Gleichungssystem

$$(97) \quad g_1 p_{1k} + g_2 p_{2k} + \dots + g_t p_{tk} + p_{t+1,k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Mithin lautet die letzte Zeile der Matrix $\mathfrak{G}_n \mathfrak{P}$, in der keine Nullen stehen, $-p_{t+1,1}, -p_{t+1,2}, \dots, -p_{t+1,n}$; es stimmt also $\mathfrak{G}_n \mathfrak{P}$ mit $-\mathfrak{P}' + \mathfrak{P}\mathfrak{A}^*$ überein. Da $\mathfrak{P}$ den Rang t hat, folgt aus der gewonnenen Matrizenrelation

$$(97^*) \quad \mathfrak{G}_n \mathfrak{P} = -\mathfrak{P}' + \mathfrak{P}\mathfrak{A}^*,$$

daß der Differentialausdruck G in der durch den Differentialausdruck A bestimmten Art als vorderer Bestandteil enthalten ist, d. h. GP ist durch A hinten teilbar und GP ist das hintere kleinste gemeinsame Vielfache von A und P . Dieselben Eigenschaften hat aber auch BP . Folglich unterscheiden sich die Differentialausdrücke B und G nur um einen Faktor. Man hat also $g_1 = \frac{\beta_1}{\beta_{m+1}}, g_2 = \frac{\beta_2}{\beta_{m+1}}, \dots, g_m = \frac{\beta_m}{\beta_{m+1}} \quad (m = t)$. Folglich stimmen die zwei Begleitmatrizen $\mathfrak{G}_n$ und $\mathfrak{B}_n$ überein, und (97^*) geht in die zu beweisende Matrizenrelation

$$\mathfrak{B}_n \mathfrak{P} = -\mathfrak{P}' + \mathfrak{P}\mathfrak{A}^*$$

über.

Ehe wir uns auch mit dem hinteren Enthaltensein beschäftigen, verweilen wir noch bei dem vorderen Enthaltensein und ersetzen die hierfür gegebene Definition I durch die folgende gleichwertige *Definition II*: Der Differentialausdruck B m -ter Ordnung ($m \leq n$) heißt in der durch den Differentialausdruck A n -ter Ordnung bestimmten Art als vorderer Bestandteil enthalten, wenn man zwei Differentialausdrücke $\bar{P}$ und $\bar{Q}$ mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche $\sum$ finden kann, so daß zwischen symbolischen Produkten von Differentialausdrücken die Gleichung

$$(98) \quad B\bar{P} = \bar{Q}A$$

besteht, und nachdem $\bar{P}$ und A von einem etwaigen größten gemeinsamen hinteren Teiler befreit sind, der sich aus A dann ergebende Differentialausdruck A_1 mit B von gleicher Ordnung ist. Bedeutet mithin D einen hinteren größten gemeinsamen Teiler von $\bar{P}$ und A , so soll

$$(99) \quad \bar{P} = \bar{P}_1 D, \quad A = A_1 D, \quad \text{also} \quad B \bar{P}_1 = \bar{Q} A_1$$

sein, wobei $\bar{P}_1$ und A_1 teilerfremd sind und A_1 und B die gleiche Ordnung haben.

Wir zeigen zunächst, daß man bei der Definition II in der Relation (98) $\bar{P}$ stets durch einen Differentialausdruck P ersetzen kann, der wie bei der Definition I eine Ordnung $\leq n-1$ besitzt. Sollte nämlich bei der Relation (98) $\bar{P}$ keine niedrigere Ordnung als A haben, so bestimme man zwei lineare homogene Differentialausdrücke M und P , so daß $\bar{P} = MA + P$ wird. Alsdann ist die Ordnung von $P \leq n-1$. Ferner ist der hintere größte gemeinsame Teiler D von $\bar{P}$ und A auch der hintere größte gemeinsame Teiler von P und A . Setzt man demnach $P = P_1 D$, so sind P_1 und A_1 ebenso wie $\bar{P}_1$ und A_1 zueinander hinten teilerfremd. Führt man noch $\bar{P} = MA + P$ in (98) ein, so erhält man $BP = (\bar{Q} - BM)A$ oder $BP = QA$, wenn man $Q = \bar{Q} - BM$ setzt. Dabei ist $P = P_1 D$, $A = A_1 D$, und A_1 und B haben die gleiche Ordnung. Da D der größte gemeinsame Teiler von P und A ist, gelten also für den Differentialausdruck P von der Ordnung $\leq n-1$ dieselben Aussagen wie für $\bar{P}$.

Um nachzuweisen, daß die Definition II alle in I aufgezählten Eigenschaften besitzt, ist noch zu zeigen, daß kein linearer Differentialausdruck TP von niedrigerer Ordnung als der von BP existiert, der ebenso wie BP durch A hinten teilbar ist. Angenommen, es gäbe einen solchen Differentialausdruck TP . Alsdann würde ein linearer homogener Differentialausdruck N existieren, so daß $TP = NA$ oder wegen $P = P_1 D$ und $A = A_1 D$ weiter $TP_1 = NA_1$ wäre. Da P_1 und A_1 hinten teilerfremd sind, ist die Ordnung von TP_1 als eines hinteren gemeinsamen Vielfachen von P_1 und A_1 mindestens gleich der Summe der Ordnungen von P_1 und A_1 . Nun ist die Ordnung von BP_1 gleich der Summe der Ordnungen von P_1 und B , oder, da A_1 und B nach Voraussetzung die gleiche Ordnung besitzen, von P_1 und A_1 . Mithin kann TP_1 keine niedrigere Ordnung als BP_1 , also $TP_1 D = TP$ keine niedrigere als $BP_1 D = BP$ haben. Folglich lassen sich aus der Definition II alle bei der Definition I verwendeten Eigenschaften herleiten. Auf analoge Weise sieht man, daß, wenn die Definition I zutrifft, die bei Definition II aufgezählten Bedingungen erfüllt sind. Die zwei Definitionen sind also äquivalent.

Ist der Differentialausdruck B als vorderer Bestandteil in der durch

A bestimmten Art enthalten und haben A und B dieselbe Ordnung, so geht die für den Artbegriff charakteristische Relation (86) über in

$$(86^*) \quad \mathfrak{B}^* \mathfrak{P} = -\mathfrak{P}' + \mathfrak{P} \mathfrak{A}^*,$$

wobei wegen des gleichen Grades der zwei Begleitmatrizen $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{B}^*$ von A und B die Matrix $\mathfrak{P}$ eine nicht verschwindende Determinante hat. Da sich die Relation (86*) auch in der Form

$$(100) \quad \mathfrak{A}^* \mathfrak{P}^{-1} = -(\mathfrak{P}^{-1})' + \mathfrak{P}^{-1} \mathfrak{B}^{*31})$$

schreiben läßt und demnach eine symmetrische Beziehung ausdrückt, ist auf Grund unseres Satzes VIII auch der Differentialausdruck A in der durch den Differentialausdruck B bestimmten Art als vorderer Bestandteil enthalten. Mithin hat man das zuerst von L. Fuchs³²⁾ mit Hilfe der Integralexistenz bewiesene Theorem: *Ist von zwei linearen homogenen Differentialausdrücken derselben Ordnung der eine als vorderer Bestandteil in der durch den anderen bestimmten Art enthalten, so sind sie stets gegenseitig vorn von derselben Art.*

Aus der Definition II folgt, daß es genügt, den Artbegriff für den besonderen Fall zweier Differentialausdrücke der gleichen Ordnung, wo die Beziehung symmetrisch ist, einzuführen. Hierfür kann man etwa definieren: *Zwei Differentialausdrücke A und B gleicher Ordnung sind vorn von derselben Art, wenn es einen zu A hinten teilerfremden Differentialausdruck P gibt, so daß BP durch A hinten teilbar ist.* Aus Definition II ergibt sich dann die Aussage: *Der Differentialausdruck B m -ter Ordnung ($m \leq n$) ist in der durch den Differentialausdruck A der n -ten Ordnung bestimmten Art als vorderer Bestandteil enthalten, wenn sich A als Produkt $A_1 D$ darstellen läßt und A_1 und B zwei Differentialausdrücke der nämlichen Ordnung sind, die vorn von derselben Art sind.*

Für den Begriff, daß der Differentialausdruck B von der m -ten ($m \leq n$) Ordnung in der durch den Differentialausdruck A n -ter Ordnung bestimmten Art hinten enthalten ist, definiert man:

Definition I'. *Der Differentialausdruck B m -ter Ordnung ($m \leq n$) heißt in der durch den Differentialausdruck A n -ter Ordnung bestimmten Art hinten enthalten, wenn man einen Differentialausdruck Π von $n-1$ oder niedrigerer Ordnung mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche Σ*

³¹⁾ Vgl. Gleichung (6) in meinem in Anmerkung ³⁾ zitierten Aufsatz, Math. Annalen, 78 (1917). S. 7.

³²⁾ L. Fuchs, Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen, Sitzungsberichte der Berliner Akademie, Jahrgang 1888, S. 819. Einen anderen Beweis der symmetrischen Beziehung ohne Voraussetzung der Integralexistenz findet man auch bei Blumberg in seiner Dissertation, S. 26.

finden kann, so daß das symbolische Produkt ΠB der linearen homogenen Differentialausdrücke Π und B durch den Differentialausdruck A vorn teilbar ist und dabei ΠB das vordere kleinste gemeinsame Vielfache von Π und A darstellt.

Gleichwertig mit der Definition I' ist die Definition II'. Der Differentialausdruck B m -ter Ordnung ($m \leq n$) heißt in der durch den Differentialausdruck A n -ter Ordnung bestimmten Art hinten enthalten, wenn man zwei Differentialausdrücke $\bar{\Pi}$ und $\bar{P}$ mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche $\sum$ finden kann, daß zwischen symbolischen Produkten von Differentialausdrücken die Gleichung

$$(101) \quad \bar{\Pi} B = A \bar{P}$$

besteht, und nachdem $\bar{\Pi}$ und A von einem etwaigen größten gemeinsamen vorderen Teiler befreit sind, der sich aus A dann ergebende Differentialausdruck A_1 mit B von gleicher Ordnung ist. Bedeutet mithin D_1 einen größten gemeinsamen vorderen Teiler von $\bar{\Pi}$ und A , so soll $\bar{\Pi} = D_1 \bar{\Pi}_1$, $A = D_1 A_1$, also $\bar{\Pi}_1 B = A_1 \bar{P}$ sein, wobei $\bar{\Pi}_1$ und A_1 vorn teilerfremd sind und A_1 und B die gleiche Ordnung besitzen.

Man kann in der Definition II' den Differentialausdruck $\bar{\Pi}$ stets durch einen Differentialausdruck Π von der Ordnung $\leq n-1$ ersetzen, wie er in der Definition I' auftritt. Dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß man zu zwei Differentialausdrücken $\bar{\Pi}$ und A stets zwei weitere Π und L finden kann, daß $\bar{\Pi} = A L + \Pi$ ³³⁾ ist, wobei Π von der Ordnung $\leq n-1$ ist. Den weiteren Nachweis für die Äquivalenz der Definitionen I' und II' führt man ebenso wie den für die Definitionen I und II, nur tritt für die hintere Teilbarkeit die vordere.

Wichtig ist es noch, den Fall zu betrachten, daß zwei Differentialausdrücke A und B gleiche Ordnung besitzen und dabei B in der durch A bestimmten Art hinten enthalten ist. Alsdann müssen A und der in der Relation (101) auftretende Differentialausdruck $\bar{\Pi}$ vorn teilerfremd sein. Angenommen nämlich $\bar{\Pi}$ und A besitzen einen vorderen gemeinsamen Teiler D_1 , so ist dieser eine bloße Funktion von x , sonst würde nämlich aus $A = D_1 A_1$ folgen, daß A_1 eine niedrigere Ordnung als A , also im Widerspruch mit der bei der Definition II' gemachten Voraussetzung auch als B hätte. Im Falle, daß A und B gleiche Ordnung haben, sind weiter noch der Differentialausdruck B und der in (101) auftretende $\bar{P}$ hinten teilerfremd. Angenommen B und $\bar{P}$ hätten nämlich einen

³³⁾ Diese Relation beweist man in entsprechender Weise wie die oben Seite 58 verwandte, häufig benützte $\bar{P} = M A + P$. Einen Beweis der letzteren siehe etwa in Blumbers Dissertation, Seite 11.

hinteren gemeinsamen Teiler T , man hätte also $B = B_1 T$, $\bar{P} = \bar{P}_1 T$, so würde aus (101) folgen: $\bar{P} B_1 = A \bar{P}_1$. Dann wäre $\bar{P} B_1$ niedrigerer Ordnung als $\bar{P} B$ oder, da B die Ordnung von A hat, als die Summe der Ordnungen von $\bar{P}$ und A . Der Differentialausdruck $\bar{P} B_1$ ist aber ein vorderes gemeinsames Vielfaches von $\bar{P}$ und A , und kann, da $\bar{P}$ und A vorn teilerfremd sind, keine niedrigere Ordnung haben als die Summe der Ordnungen von $\bar{P}$ und A . Aus diesem Widerspruch ergibt sich, daß $\bar{P}$ und B hinten teilerfremd sind. Die Relation (101) $A \bar{P} = \bar{P} B$ läßt sich (vgl. (98)), da A und B gleiche Ordnung haben und B und $\bar{P}$ hinten teilerfremd sind, mithin auch so auffassen, daß A vorn in der durch B bestimmten Art enthalten ist.

Da bei Differentialausdrücken gleicher Ordnung der Begriff „vorn von derselben Art“ symmetrischer Natur war, ist B auch vorn mit A von derselben Art. Entsprechend wie wir bei Differentialausdrücken gleicher Ordnung aus dem hinteren Enthaltensein auf das vordere schlossen, ergibt sich auch aus dem vorderen Enthaltensein das hintere. Da B vorn mit A von derselben Art ist, muß demnach A mit B hinten von derselben Art sein. Man gewinnt demnach das Resultat: *Für zwei Differentialausdrücke gleicher Ordnung ist der Begriff von derselben Art ein gegenseitiger, und zwei solche Differentialausdrücke, die hinten von derselben Art sind, sind es stets auch vorn und umgekehrt. Bei Differentialausdrücken gleicher Ordnung braucht nicht zwischen vorn und hinten von derselben Art unterschieden zu werden.*

Aus der Definition II' folgert man, daß der Begriff des hinteren Enthaltenseins ebenso wie der des vorderen stets auf den Artbegriff für Differentialausdrücke gleicher Ordnung zurückgeführt werden kann. Aus der Definition II' ergibt sich nämlich: *Der Differentialausdruck B ist dann und nur dann als hinterer Bestandteil in der durch den Differentialausdruck A bestimmten Art enthalten, wenn man den Differentialausdruck A als Produkt $D_1 A_1$ darstellen kann und A_1 und B zwei Differentialausdrücke gleicher Ordnung sind, die gegenseitig von derselben Art sind.*

Nach Satz I des § 1 schließen wir aus der Zerlegung $A = D_1 A_1$, daß sich die Begleitmatrix $\mathfrak{A}^*$ des Differentialausdruckes A transformieren läßt in eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{D}_{11} & () \\ \mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{22}, \end{pmatrix}$$

wobei für $\mathfrak{A}_{22}$ die Begleitmatrix von A_1 gewählt werden kann. Da A_1 und B gegenseitig von derselben Art sind, ist, wie in diesem Paragraphen

bewiesen, die Begleitmatrix von A_1 transformierbar in die von B . Folglich läßt sich, wenn B hinterer Bestandteil von A ist, die Begleitmatrix $\mathfrak{A}^*$ überführen in die Form

$$(102) \quad \begin{array}{cc} \mathfrak{D}_{11} & 0 \\ \mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{B}^*, \end{array}$$

wobei $\mathfrak{B}^*$ die Begleitmatrix von B ist.

Durch rückwärtiges Durchlaufen dieser Schlüsse sieht man aus Satz II des § 2, daß die Darstellbarkeit der Begleitmatrix $\mathfrak{A}^*$ in der Form (102) die Zerlegbarkeit von A als Produkt $D_1 A_1$ nach sich zieht, wobei die Begleitmatrix von A_1 mit $\mathfrak{B}^*$ von derselben Art ist. Daher sind A_1 und B von derselben Art. Hiermit ist gezeigt, daß der Differentialausdruck B in der durch A bestimmten Art hinten enthalten ist.

Im Falle, daß B vorn in der durch A bestimmten Art enthalten ist, ergibt sich aus der Zerlegung $A = A_1 D$, wobei A_1 und B gegenseitig von derselben Art sind, ebenfalls nach den Sätzen I des § 1 und VIII dieses Paragraphen eine entsprechende Darstellung der Begleitmatrix $\mathfrak{A}^*$, nämlich in der Form

$$\begin{array}{cc} \mathfrak{B}^* & 0 \\ \mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{22}, \end{array}$$

wobei $\mathfrak{B}^*$ wieder die Begleitmatrix von B ist. Umgekehrt folgt aus dieser Darstellung, daß B in der durch A bestimmten Art vorn enthalten ist.

Mithin kann man zusammenfassend folgendes Theorem aussprechen:

Satz IX. *Charakteristisch dafür, daß der Differentialausdruck B vorn oder hinten in der durch den Differentialausdruck A bestimmten Art enthalten ist, erweist sich, daß die Begleitmatrix $\mathfrak{A}^*$ von A transformiert werden kann in die Form*

$$\begin{array}{cc} \mathfrak{B}^* & 0 \\ \mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{22} \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{cc} \mathfrak{A}_{11} & 0 \\ \mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{B}^*. \end{array}$$

wobei $\mathfrak{B}^*$ die Begleitmatrix von B ist.

Auch die Möglichkeit der Transformation der Matrix $\mathfrak{A}^*$ in die Form (102) läßt sich durch eine Matrizenrelation ausdrücken.

Für die Darstellbarkeit der Begleitmatrix $\mathfrak{A}^*$ in der Form (102) ist nämlich, wie ich früher³⁴⁾ gezeigt habe, die Existenz einer Matrix U charakteristisch, so daß

$$(103) \quad \mathfrak{A}^* U = -U' + U \mathfrak{B},$$

³⁴⁾ In dem in Anmerkung ¹³⁾ zitierten Aufsatz Math. Annalen, 78 (1918), S. 355, wo ich weitergehend Matrizenkomplexe behandle, die sich in der Form (102) schreiben lassen. Dort definiere ich den Begriff, daß ein *Matrizenkomplex* $\mathfrak{B}^*$ als *hinterer Bestandteil* in der durch einen anderen bestimmten Art enthalten ist, durch die Darstellung in der Form (102) oder gleichwertig durch die Relation (103).

wird, wobei $\mathfrak{B}_n$ dieselbe Bedeutung wie auf Seite 51 hat und U eine Matrix ist, deren Rang gleich dem Range m von $\mathfrak{B}^*$ ist und die, abgesehen von den ersten m Spalten, nur Nullen enthält. Mithin ergibt sich der dem Satze VIII auf Seite 50 entsprechende

Satz VIII'. *Der Differentialausdruck B m -ter Ordnung ist dann und nur dann in der durch den Differentialausdruck A n -ter Ordnung ($m \leq n$) bestimmten Art hinten enthalten, wenn die Begleitmatrix $\mathfrak{B}^*$ als hinterer Bestandteil in der durch die Begleitmatrix $\mathfrak{A}^*$ bestimmten Art enthalten ist. Dies besagt: Es existiert eine quadratische Matrix*

$$U: \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \dots & \mu_{1m} & 0 & \dots & 0 \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \dots & \mu_{2m} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ \mu_{n1} & \mu_{n2} & \dots & \mu_{nm} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

vom Range m mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche Σ , so daß die Matrizengleichung

$$(103) \quad \mathfrak{A}^* U = -U' + U \mathfrak{B}_n$$

besteht; hierbei bedeutet U' die durch Differentiation der Elemente μ_{ik} aus U hervorgehende Matrix und $\mathfrak{B}_n$ die sich aus der Begleitmatrix $\mathfrak{B}^*$ durch Beifügen von $n - m$ Zeilen und $n - m$ Spalten mit Nullen ergebende Matrix.

§ 10.

Neue Beweise der Zerlegungssätze für Differentialausdrücke derselben Art.
Die Eindeutigkeitsätze für die Zerlegung eines Differentialausdruckes in irreduzible bzw. aufeinanderfolgende vordere bzw. aufeinanderfolgende hintere größte Faktoren.

Aus dem Hauptsatz I und Satz VIII des vorigen Paragraphen ergibt sich ein besonders einfacher neuer Beweis meines Satzes von der gleichmöglichen Zerlegbarkeit zweier Differentialausdrücke derselben Art³⁵⁾:

Sind B und $\bar{B}$ zwei Differentialausdrücke derselben Ordnung, die von derselben Art sind, und ist B zerlegbar in

$$B = B_1 B_2 \dots B_k,$$

so läßt sich für $\bar{B}$ eine Zerlegung

$$(104) \quad \bar{B} = \bar{B}_1 \bar{B}_2 \dots \bar{B}_k$$

finden, so daß die Differentialausdrücke $\bar{B}_i$ und B_i ($i = 1, 2, \dots, k$) stets von derselben Art sind.

³⁵⁾ Vgl. Anmerkung ³⁾.

Aus der Zerlegung $B = B_1 B_2 \dots B_k$ folgt nach dem Hauptsatz I des § 3, daß sich die Begleitmatrix $\mathfrak{B}^*$ des Differentialausdruckes B in die Form

$$\mathfrak{B}: \begin{array}{cccccc} \mathfrak{B}_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathfrak{B}_{21} & \mathfrak{B}_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{B}_{k1} & \mathfrak{B}_{k2} & \mathfrak{B}_{k3} & \dots & \mathfrak{B}_{kk} \end{array}$$

bringen läßt. Da die Differentialausdrücke B und $\bar{B}$ von derselben Art sind, folgt aus Satz VIII, daß ihre Begleitmatrizen ebenfalls von derselben Art sind. Mithin muß sich die Begleitmatrix des Differentialausdruckes $\bar{B}$ ebenfalls in die Form $\mathfrak{B}$ überführen lassen. Folglich läßt sich der Differentialausdruck $\bar{B}$ nach dem Hauptsatz I in der durch (104) gegebenen Weise zerlegen, und dabei ist die Begleitmatrix von $\bar{B}_i$ mit $\mathfrak{B}_{ii}$, d. h. mit der Begleitmatrix des Differentialausdruckes B_i von derselben Art. Dies besagt aber nach Satz VIII, daß die Differentialausdrücke B_i und $\bar{B}_i$ von derselben Art sind.

Ich will nun noch neue Beweise für die drei Eindeutigkeitssätze, die ich über die Zerlegung linearer homogener Differentialausdrücke derselben Art in irreduzible bzw. in aufeinanderfolgende vordere größte vollständig reduzible bzw. in aufeinanderfolgende hintere größte vollständig reduzible Faktoren aufgestellt habe, angeben.

$$(105) \quad B = B_1 B_2 \dots B_l$$

sei eine der drei angegebenen Zerlegungen des Differentialausdruckes B , und der Differentialausdruck $\bar{B}$, der mit B von derselben Art ist und mit ihm die gleiche Ordnung hat, sei entsprechend dem Differentialausdruck B zerlegt in irreduzible bzw. aufeinanderfolgende vordere größte vollständig reduzible bzw. aufeinanderfolgende hintere größte vollständig reduzible Faktoren. Die Zerlegung von $\bar{B}$ laute

$$(106) \quad \bar{B} = \bar{B}_1 \bar{B}_2 \dots \bar{B}_\mu.$$

Nach unserem Satze VII des § 8 lassen sich die Begleitmatrizen von (105) und (106) in die Matrizen

$$(107) \quad \begin{array}{cccc} \mathfrak{B}_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \mathfrak{B}_{21} & \mathfrak{B}_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{B}_{l1} & \mathfrak{B}_{l2} & \dots & \mathfrak{B}_{ll} \end{array} \quad \text{bzw. (108)} \quad \begin{array}{cccc} \bar{\mathfrak{B}}_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \bar{\mathfrak{B}}_{21} & \bar{\mathfrak{B}}_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathfrak{B}}_{\mu 1} & \bar{\mathfrak{B}}_{\mu 2} & \dots & \bar{\mathfrak{B}}_{\mu \mu} \end{array}$$

transformieren, wobei (107) und (108) je nach der Art der Zerlegungen (105) und (106) Matrizen darstellen, bei denen die irreduziblen bzw. die aufeinanderfolgenden vorderen größten vollständig reduziblen bzw. die

aufeinanderfolgenden hinteren größten vollständig reduziblen Matrizen hervorgehoben erscheinen, und es ist die Matrix $\mathfrak{B}_{ii}$ mit der Begleitmatrix des Differentialausdruckes B_i ($i=1, 2, \dots, \lambda$) und die Matrix $\bar{\mathfrak{B}}_i$ mit der Begleitmatrix des Differentialausdruckes $\bar{B}_i$ von derselben Art ($i=1, 2, \dots, \mu$). Da die Differentialausdrücke B und $\bar{B}$ gleiche Ordnung haben und von derselben Art sein sollen, sind ihre Begleitmatrizen nach Satz VIII gegenseitig von derselben Art. Mithin sind auch die Matrizen (107) und (108) von derselben Art.

Daher lassen sich meine Eindeutigkeitssätze³⁶⁾ anwenden, die ich für die Überführung eines Matrizenkomplexes unter Hervorhebung seiner irreduziblen bzw. aufeinanderfolgenden vorderen größten vollständig reduziblen bzw. aufeinanderfolgenden hinteren größten vollständig reduziblen Bestandteile gegeben habe, und die natürlich auch für eine einzelne Matrix zutreffen. Nach ihnen sind, wenn wir eine Zerlegung der Matrizen (107) und (108) in irreduzible Bestandteile vor uns haben, die Matrizen $\mathfrak{B}_{11}, \mathfrak{B}_{22}, \dots, \mathfrak{B}_{\lambda\lambda}$ den Matrizen $\bar{\mathfrak{B}}_{11}, \bar{\mathfrak{B}}_{22}, \dots, \bar{\mathfrak{B}}_{\mu\mu}$ in gewisser Reihenfolge eindeutig umkehrbar zuordnungsfähig (also im besonderen $\lambda = \mu$), so daß zwei zugeordnete Matrizen immer von derselben Art sind. Sind (107) und (108) Zerlegungen in aufeinanderfolgende vordere bzw. hintere größte vollständig reduzible Bestandteile, so sind die Matrizen $\mathfrak{B}_{11}, \mathfrak{B}_{22}, \dots, \mathfrak{B}_{\lambda\lambda}$ sogar der Reihe nach den Matrizen $\bar{\mathfrak{B}}_{11}, \bar{\mathfrak{B}}_{22}, \dots, \bar{\mathfrak{B}}_{\mu\mu}$ derart zugeordnet, daß zwei zugeordnete Matrizen stets von derselben Art sind. Da die Matrizen $\mathfrak{B}_{ii}$ und $\bar{\mathfrak{B}}_i$ mit den Begleitmatrizen von B_i und $\bar{B}_i$ von derselben Art sind, also durch diese ersetzt werden können, und ferner nach Satz VIII zwei Differentialausdrücke immer von derselben Art sind, wenn es für ihre Begleitmatrizen zutrifft, ergibt sich das folgende Resultat: Im ersten Falle der irreduziblen Zerlegung kann man die Differentialausdrücke $B_1, B_2, \dots, B_\lambda$ den Differentialausdrücken $\bar{B}_1, \bar{B}_2, \dots, \bar{B}_\mu$ bis auf die Reihenfolge, im zweiten und dritten Falle sogar in ihrer Aufeinanderfolge eindeutig umkehrbar zuordnen (also im besonderen $\lambda = \mu$), so daß zwei zugeordnete Differentialausdrücke immer von derselben Art sind. Mithin haben wir folgende drei Sätze neu bewiesen:

a) *Wie auch immer zwei lineare homogene Differentialausdrücke gleicher Ordnung, die von derselben Art sind, in irreduzible Faktoren zerlegt werden, kann man die Faktoren einer jeden Zerlegung des einen Differentialausdruckes den Faktoren einer jeden Zerlegung des anderen Differentialausdruckes derart eineindeutig zuordnen, daß zwei zugeordnete Differentialausdrücke immer von derselben Art sind*³⁷⁾.

³⁶⁾ Es handelt sich um die in den Anmerkungen ¹⁰⁾ bis ¹³⁾ genannten Sätze α), β), γ).

³⁷⁾ Vgl. Anmerkung γ).

b) Wie auch immer zwei lineare homogene Differentialausdrücke derselben Art in aufeinanderfolgende vordere größte vollständig reduzible Faktoren zerlegt werden, stets enthält jede Zerlegung gleichviele größte vollständig reduzible Faktoren, und diese sind der Reihe nach einander zugeordnet, daß zwei zugeordnete Differentialausdrücke immer von derselben Art sind³⁸⁾.

c) Der b) entsprechende Satz, wenn man für die aufeinanderfolgenden vorderen die aufeinanderfolgenden hinteren größten vollständig reduziblen Faktoren treten läßt³⁹⁾.

Über die Zerlegung von Differentialausdrücken derselben Art leite ich auf Grund der hier vorliegenden Betrachtungen noch folgendes Theorem an, das ich bisher in dieser Allgemeinheit nicht ausgesprochen habe⁴⁰⁾:

$$d) \quad B = R_1 R_2 \dots R_\lambda$$

sei irgendeine Zerlegung des Differentialausdruckes B in aufeinanderfolgende vordere größte vollständig reduzible Faktoren, und

$$\bar{B} = M_\mu M_{\mu-1} \dots M_1$$

sei eine solche des Differentialausdruckes $\bar{B}$ in aufeinanderfolgende hintere größte vollständig reduzible Faktoren. B und $\bar{B}$ seien von derselben Art. Dann ist $\lambda = \mu$, d. h. die Anzahl der vorderen Faktoren von B ist gleich der Anzahl der hinteren Faktoren von $\bar{B}$. Ferner ist der Differentialausdruck $M_\mu M_{\mu-1} \dots M_{\mu-i+1}$ stets in der durch den Differentialausdruck $R_1 R_2 \dots R_i$ bestimmten Art vorn enthalten. Weiter ist der Differentialausdruck $R_{\lambda-i+1} R_{\lambda-i+2} \dots R_\lambda$ stets in der durch den Differentialausdruck $M_i M_{i-1} \dots M_1$ bestimmten Art hinten enthalten.

Der Beweis folgt aus der Tatsache, daß sich die Begleitmatrizen von B und $\bar{B}$ in die Form

$$(109) \quad \begin{array}{ccccccc} \mathfrak{R}_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & & \\ & \mathfrak{R}_{21} & \mathfrak{R}_{22} & 0 & \dots & 0 & \\ & \vdots & & & & & \\ & \mathfrak{R}_{\lambda 1} & \mathfrak{R}_{\lambda 2} & \mathfrak{R}_{\lambda 3} & \dots & \mathfrak{R}_{\lambda \lambda} & \end{array}$$

³⁸⁾ Vgl. Anmerkung ⁶⁾.

³⁹⁾ Vgl. Anmerkung ⁹⁾.

⁴⁰⁾ Das für einen Differentialausdruck, also beim Zusammenfallen von B und $\bar{B}$, gültige Theorem findet sich als Satz III in meinem in Anmerkung ⁹⁾ zitierten Aufsatz, und zwar weitergehend, als es sich aus d) ergibt.

bzw.

$$(110) \quad \begin{array}{cccc} \mathfrak{M}_{\mu\mu} & 0 & \dots & 0 \\ \mathfrak{M}_{\mu-1,\mu} & \mathfrak{M}_{\mu-1,\mu-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{M}_{1\mu} & \mathfrak{M}_{1\mu-1} & \dots & \mathfrak{M}_{11} \end{array}$$

bringen lassen, und diese nach Satz VII in § 8 Darstellungen unter Hervorhebung der aufeinanderfolgenden vorderen bzw. hinteren größten vollständig reduzierten Matrizen sind. Hierbei ist die Begleitmatrix von $R_1 R_2 \dots R_\mu$ mit der Matrix

$$(111) \quad \begin{array}{cccc} \mathfrak{R}_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \mathfrak{R}_{21} & \mathfrak{R}_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{R}_{i1} & \mathfrak{R}_{i2} & \dots & \mathfrak{R}_{ii} \end{array}$$

und diejenige von $M_i M_{i-1} \dots M_1$ mit der Matrix

$$(112) \quad \begin{array}{cccc} \mathfrak{M}_{ii} & 0 & \dots & 0 \\ \mathfrak{M}_{i-1,i} & \mathfrak{M}_{i-1,i-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{M}_{1i} & \mathfrak{M}_{1i-1} & \dots & \mathfrak{M}_{11} \end{array}$$

von derselben Art.

Da die Differentialausdrücke B und $\bar{B}$ nach Voraussetzung von derselben Art sind, trifft dies nach Satz VIII auch für die Matrizen (109) und (110) zu. Da bei diesen Matrizen die aufeinanderfolgenden vorderen bzw. aufeinanderfolgenden hinteren größten vollständig reduzierten Bestandteile hervorgehoben erscheinen, ist nach einem früher von mir für Matrizenkomplexe bewiesenen Satze ⁴¹⁾ $\lambda = \mu$, ferner ist die Matrix ($i = 1, 2, \dots, \mu$)

$$(113) \quad \begin{array}{cccc} \mathfrak{M}_{\mu\mu} & 0 & \dots & 0 \\ \mathfrak{M}_{\mu-1,\mu} & \mathfrak{M}_{\mu-1,\mu-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{M}_{\mu-i+1,\mu} & \mathfrak{M}_{\mu-i+1,\mu-1} & \dots & \mathfrak{M}_{\mu-i+1,\mu-i+1} \end{array}$$

als vorderer Bestandteil in der durch die Matrix (111) bestimmten Art und die Matrix

$$(114) \quad \begin{array}{cccc} \mathfrak{R}_{\lambda-i+1,\lambda-i+1} & 0 & \dots & 0 \\ \mathfrak{R}_{\lambda-i+2,\lambda-i+1} & \mathfrak{R}_{\lambda-i+2,\lambda-i+2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{R}_{\lambda,\lambda-i+1} & \mathfrak{R}_{\lambda,\lambda-i+2} & \dots & \mathfrak{R}_{\lambda\lambda} \end{array}$$

⁴¹⁾ Über Matrizen- und Differentialkomplexe III, Math. Annalen, 78 (1918), S. 359.

der hinterer Bestandteil in der durch die Matrix (112) bestimmten Art enthalten. Die Begleitmatrizen von $M_\mu M_{\mu-1} M_{\mu-i+1}$, $R_1 R_2 \dots R_i$, $R_{\lambda-i+1} R_{\lambda-i+2} \dots R_\lambda$, $M_i M_{i-1} \dots M_1$ sind mit den Matrizen (113), (111), (114) und (112) von derselben Art. Mithin ergibt sich aus den Sätzen VIII und VIII' des § 9, daß $M_\mu M_{\mu-1} \dots M_{\mu-i+1}$ als vorderer Bestandteil in der durch $R_1 R_2 \dots R_i$ bestimmten Art und $R_{\lambda-i+1} R_{\lambda-i+2} \dots R_\lambda$ als hinterer Bestandteil in der durch $M_i M_{i-1} \dots M_1$ bestimmten Art enthalten ist.

Da jeder Differentialausdruck mit sich selbst von derselben Art ist, kann man in den vier letzten Theoremen a) bis d) den zweiten Differentialausdruck $\bar{B}$ gleich dem ersten B wählen und hat dann statt der ausgesprochenen Eindeutigkeitssätze für die Zerlegung zweier linearer homogener Differentialausdrücke derselben Art die *Eindeutigkeitssätze für die verschiedenen Zerlegungen eines einzigen linearen homogenen Differentialausdruckes in irreduzible bzw. aufeinanderfolgende vordere oder hintere größte vollständig reduzible Faktoren*. Es ist aber zu bemerken, daß auch im Fall der Zerlegung eines einzigen Differentialausdruckes in aufeinanderfolgende vordere und hintere größte vollständig reduzible Faktoren noch schärfere Sätze erhalten habe, als sie sich durch Spezialisierung aus a) bis d) ergeben. Die Zerlegung eines einzigen linearen homogenen Differentialausdruckes in aufeinanderfolgende vordere oder hintere größte vollständig reduzible Faktoren führt nämlich auf ähnliche Differentialausdrücke statt auf solche derselben Art und kann sogar *eindeutig* gemacht werden. Beim Satze d) erhält man für einen einzigen Differentialausdruck vordere und hintere Teiler statt des vorderen bzw. hinteren Enthaltenseins⁴²⁾.

Freiburg i. B., 18. September 1919.

⁴²⁾ Vgl. den in Anmerkung ⁸⁾ genannten Aufsatz, Satz I, II, III.

(Eingegangen am 21. September 1919.)

Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen.

Zweite Abhandlung.

Stabilitätsbetrachtungen.

Von

Leon Lichtenstein in Berlin.

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

Erstes Kapitel. Problemstellung.

- § 1. Bezeichnungen und allgemeine Sätze (zum Teil Referat).
- § 2. Die fundamentale Integro-Differentialgleichung.
- § 3. Fortsetzung.

Zweites Kapitel. Untersuchung einer Integralgleichung.

- § 1. Triviale Nullösungen.
- § 2. Das vollständige normierte Orthogonalsystem.
- § 3. Fortsetzung.
- § 4. Besonderer Fall eines Rotationskörpers.

Drittes Kapitel. Existenzsätze.

- § 1. Verfahren der sukzessiven Approximationen. Der reguläre Fall.
- § 2. Fortsetzung.
- § 3. Diskussion.
- § 4. Der Verzweigungsfall.
- § 5. Diskussion der Verzweigungsgleichung.
- § 6. Rotierende Flüssigkeiten in einem Außenfelde.

Viertes Kapitel. Stabilitätsbetrachtungen. Der Hauptfall.

- § 1. Problemstellung.
- § 2. Die Fundamentalformel.
- § 3. Abschätzung des Restes.

- § 4. Elimination einer Nebenbedingung.
 § 5. Untersuchung einer Integralgleichung.
 § 6. Vorzeichen von $A_1 - A$ bei beliebiger Lage des Schwerpunktes von T_1 . Der Hauptfall.
 § 7. Stabilitätskriterien. Bedingte Stabilität.
 § 8. Stabilitätskriterien bei Vorhandensein eines Außenfeldes.
- ünftes Kapitel. Stabilitätsbetrachtungen. Der singuläre Fall.
 § 1. Stabilitätscharakter der Nachbarfiguren.
 § 2. Fortsetzung.
 § 3. Stabilitätscharakter der singulären Figur. Eine für die Stabilität notwendige Bedingung.
- sechstes Kapitel. Anwendungen.
 § 1. Ein von Laplace behandeltes Problem der Gleichgewichtsverteilung.
 § 2. Maclaurinsche und Jacobische Ellipsoide.

In der vorliegenden Arbeit werden die in der ersten Abhandlung¹⁾ begonnenen Untersuchungen fortgesetzt.

Es sei T eine Gleichgewichtsfigur, die im allgemeinen aus mehreren ($n \geq 1$) getrennten Flüssigkeitsmassen bestehen kann. Die Flüssigkeit soll um die z -Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω wie ein starrer Körper gleichförmig rotieren. Die Begrenzung S von T besteht aus einer endlichen Anzahl von Komponenten²⁾. Die Gleichungen von S seien in der Form

$$1) \quad x = X(\xi, \eta), \quad y = Y(\xi, \eta), \quad z = Z(\xi, \eta)$$

gegeben. Wir nehmen an, daß die Funktionen X, Y, Z stetige Ableitungen aller Ordnungen haben; der Ausdruck

$$2) \quad \left[\frac{\partial(X, Y)}{\partial(\xi, \eta)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(Y, Z)}{\partial(\xi, \eta)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(Z, X)}{\partial(\xi, \eta)} \right]^2$$

ist nirgends gleich Null³⁾.

¹⁾ L. Lichtenstein, „Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen. Erste Abhandlung. Homogene Flüssigkeiten. Allgemeine Existenzsätze“. Math. Zeitschrift, 1 (1918), S. 229–284. Diese Arbeit wird als die erste Abhandlung zitiert. Für das Verständnis der folgenden Ausführungen ist die Kenntnis der ersten Abhandlung nicht erforderlich.

²⁾ Jede Flüssigkeitsmasse ist, wie ich loc. cit.⁴⁾ S. 1125 bewiesen habe, dabei von einem einzigen Randkontinuum begrenzt.

³⁾ Eine Darstellung dieser Art ist möglich, wenn jede Randkomponente von S stetig gekrümmt ist, oder auch wenn sie nur eine stetige Normale hat, sobald überdies bekannt ist, daß die Schwerkraft auf S nirgends verschwindet. Vgl. loc. cit.¹⁾, S. 234 und loc. cit.⁴⁾, S. 1130–1132.

Es sei f die Dichte der Flüssigkeit, κ die Gravitationskonstante. Wie ich neuerdings bewiesen habe, hat jede Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeiten eine auf der Umdrehungsachse senkrechte Symmetrieebene⁴⁾. Wir wählen sie zur Ebene $z = 0$. Der Schwerpunkt der Figur, der stets auf der Rotationsachse liegen muß (vgl. loc. cit.⁴⁾ S. 1121) liegt jetzt also im Koordinatenursprung. Wir nehmen an, daß T eine weitere durch die Achse hindurchgehende Symmetrieebene hat und wählen diese zur Ebene $y = 0$ ⁵⁾.

Die erste Abhandlung war der Beantwortung der Frage gewidmet, ob es in der Umgebung von T weitere Figuren T_1 des relativen Gleichgewichtes gibt, die die Ebene $y = 0$ zur Symmetrieebene haben und eine lineare Reihe bilden. Die Lösung ist dort auf die Auflösung der Integral-Differentialgleichung

$$(3) \quad \psi \zeta + \int_S \frac{1}{\varrho} \zeta' d\sigma' = s - R^2 \lambda - \frac{\omega^2}{2\kappa f} (a^2 + b^2) \zeta^2 - 2R\tau \lambda \zeta - (a^2 + b^2) \lambda \zeta^3 - U^{(2)} - U^{(3)} - \dots$$

zurückgeführt worden. Hier bezeichnet $f\kappa\psi$ die Schwerkraft im Punkte (ξ, η) auf S , kürzer in $\sigma^6)$, ζ die Entfernung des Schnittpunktes der Normale (ν) in σ mit der Fläche S_1 von dem Punkte σ , $d\sigma$ das Flächenelement in σ , τ den Kosinus des von (ν) und dem Lote von (ξ, η) auf die Umdrehungsachse (von der z -Achse nach (ξ, η) hin gerichtet) eingeschlossenen Winkels, R die Entfernung des Punktes σ von der Rotationsachse; ϱ ist die Entfernung der Punkte σ und σ' auf S , s ist auf jeder Komponente von S konstant und wird durch die Forderung bestimmt, daß das Volumen jeder Einzelmasse von T_1 einen vorgeschriebenen Wert haben soll; a, b, c sind die Richtungskosinus von (ν) ; ω_1 ist die Winkelgeschwindigkeit von T_1 . Es gilt ferner

⁴⁾ Vgl. L. Lichtenstein, „Über einige Eigenschaften der Gleichgewichtsfiguren rotierender homogener Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetz anziehen“, Sitzungsberichte der Preussischen Akad. d. Wiss., 48 (1918), S. 1120 bis 1135, insb. S. 1120–1124. Diese Symmetrieeigenschaft hatte ich in der ersten Abhandlung noch als eine besondere Voraussetzung eingeführt.

⁵⁾ Alle bisher bekannten oder vermuteten Gleichgewichtsfiguren haben diese Eigenschaft.

Es sei Θ eine lineare Reihe von Gleichgewichtsfiguren, die eine Rotationsfigur T_0 enthält (diese kann insb. auch eine Verzweigungsfigur sein). Es läßt sich unter Umständen beweisen, daß alle Figuren von Θ in hinreichender Nähe von T_0 eine durch die z -Achse hindurchgehende Symmetrieebene haben (vgl. § 4 des dritten Kapitels).

⁶⁾ Die Schwerkraft $f\kappa\psi$ steht auf S senkrecht und gilt als positiv, wenn sie nach außen gerichtet ist. Wir nehmen durchweg $\psi < 0$ an.

$$\lambda = \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{2xf},$$

$$U^{(n)} = \frac{1}{n!} \int_S \sum (a' \zeta' - a \zeta) \left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left(\frac{A'_t}{\varrho_t} \right) \right]_{t=0} d\zeta' d\eta',$$

$$4) \quad \varrho_t^2 = \varrho^2 + 2t \sum (X' - X)(a' \zeta' - a \zeta) + t^2 \sum (a' \zeta' - a \zeta)^2,$$

$$A'_t = \frac{\partial(Y' + b' t \zeta', Z' + c' t \zeta')}{c(\xi', \eta')}, \quad B'_t = \frac{o(Z' + c' t \zeta', X' + a' t \zeta')}{c(\xi', \eta')}, \dots$$

7⁽²⁾, $U^{(3)}$, ... sind Integralausdrücke über S , die $\zeta, \zeta', \frac{\partial \zeta'}{\partial \xi'}, \frac{\partial \zeta'}{\partial \eta'}$, jede dieser beiden partiellen Ableitungen übrigens nur linear, enthalten.

Die lineare Integralgleichung

$$5) \quad \psi \zeta + \int_S \frac{1}{\varrho} \zeta' d\sigma' = 0$$

hat, wenn S keine Rotationsfläche um die z -Achse ist, stets zwei linear unabhängige Nulllösungen u_1 und u_2 . Hat die Gleichgewichtsfigur Rotationssymmetrie um die z -Achse, so reduziert sich die Anzahl der trivialen Nulllösungen auf eins.

Sind die vorgenannten Nulllösungen die einzigen vorhandenen, so liegt der reguläre Fall vor; die Integro-Differentialgleichung (3) hat für jedes Paar reeller oder komplexer Werte von s und λ , deren absoluter Betrag hinreichend klein ist, eine und nur eine Lösung. Die Figur T gehört einer $(q+1)$ -parametrischen linearen Reihe von Gleichgewichtsfiguren an.

Hat (5) Nulllösungen, die von den trivialen Lösungen linear unabhängig sind, so liegt der Verzweigungsfall vor. Die Integro-Differentialgleichung (3) hat im allgemeinen mehr als eine Lösung, die zu vorgegebenen Werten von s und λ gehört.

Die vorstehenden Existenzsätze habe ich in der ersten Abhandlung durch ein Verfahren der sukzessiven Approximationen bewiesen. Eine als Folge eines Schreibfehlers zurückgebliebene Lücke habe ich in einer nachträglichen Notiz⁷⁾ ausgefüllt. Ich habe dort erkannt, daß das ursprünglich in Aussicht genommene Auswahlverfahren überflüssig war. Auch hat die Einführung der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2}, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \partial \eta}$ als entbehrlich erwiesen. Da der Konvergenzbeweis hierdurch an Einfachheit und Übersichtlichkeit erheblich gewonnen hatte, so habe

⁷⁾ Vgl. L. Lichtenstein, „Bemerkung zu der Abhandlung: Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen“, Math. Zeitschrift, 3 (1919), S. 172–174.

ich ihn in dem ersten und dem dritten Kapitel der vorliegenden Abhandlung in erweiterter und vereinfachter Gestalt noch einmal im Zusammenhang wiedergegeben. Mit Rücksicht auf spätere Anwendungen sind die Ergebnisse zuletzt auf den allgemeineren Fall einer Flüssigkeit, die von äußeren Feldern beeinflusst wird, ausgedehnt worden. Als äußere Felder kommen namentlich Gravitationsfelder mitrotierender starrer Massen in Betracht⁸⁾. In §§ 4 und 5 des dritten Kapitels wird eine Reihe neuer allgemeiner Sätze über Verzweigungsfiguren, die für das folgende von Wichtigkeit sind, abgeleitet. In § 1 des ersten Kapitels habe ich, um alles beisammen zu haben, in aller Kürze über gewisse allgemeine Sätze referiert, die ich vor kurzem an einer anderen Stelle veröffentlicht habe⁹⁾.

Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit der Integralgleichung (5) und der Integralgleichung

$$(6) \quad \psi \zeta + \nu \int_S \frac{1}{\varrho} \zeta' d\sigma' = 0.$$

Ist T ein Rotationskörper um die z -Achse, so haben die Eigenfunktionen entweder Rotationssymmetrie um die z -Achse, oder sie treten paarweise auf und sind von der Form

$$(7) \quad \mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \cos k\mathfrak{d}, \quad \mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \sin k\mathfrak{d}.$$

Hier bezeichnet $\mathfrak{s}$ die Bogenlänge einer Meridiankurve, $\mathfrak{d}$ den Azimutwinkel, k eine ganze Zahl. Der Kern $\frac{1}{\varrho}$ ist positiv definit und abgeschlossen. Für diesen Satz, der im Text mit potentialtheoretischen Mitteln bewiesen wird, gibt Herr I. Schur in einer auf diese Arbeit folgenden Note einen sehr interessanten direkten Beweis¹⁰⁾.

Wir wenden uns jetzt der Frage nach der *Stabilität* einer Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeiten zu.

Die Frage, wann eine Gleichgewichtsfigur als stabil zu bezeichnen ist, ist vielfach erörtert worden, kann aber noch keineswegs als definitiv beantwortet gelten¹¹⁾. Wir legen unseren Betrachtungen das folgende von Thomson und Tait, Poincaré und Liapounoff benutzte Kriterium zugrunde.

Es sei J das Trägheitsmoment von T . Das Moment der Bewegungsgröße um die Umdrehungsachse ist gleich ωJ . Es sei T_1 irgendein Körper in der Nachbarschaft erster Ordnung von T , das folgende Eigenschaften hat. Die Volumina zusammengehöriger Einzelmassen von T_1

⁸⁾ Auch das von Laplace behandelte Problem des Gleichgewichtes einer über einem starren Kerne ausgebreiteten ruhenden Flüssigkeitsschicht gehört hierher.

⁹⁾ Vgl. loc. cit.⁴⁾.

¹⁰⁾ Vgl. I. Schur, „Über einen von Herrn L. Lichtenstein benutzten Integralsatz“, Math. Zeitschrift, 7 (1920), S. 232–234.

¹¹⁾ Vgl. A. Liapounoff, loc. cit.¹⁰⁾, S. 132–140.

und T sind einander gleich. Der Schwerpunkt von T_1 deckt sich mit demjenigen von T . Das Trägheitsmoment von T_1 in bezug auf die Rotationsachse sei J_1 . Wird zur Vereinfachung

$$8) \quad \frac{\omega^2 J^2}{f^2} = \tilde{M}$$

gesetzt, so soll T stabil heißen, wenn der Ausdruck

$$9) \quad \Lambda_1 = \frac{\tilde{M}}{J_1} \iint_{T_1} \frac{dv \, d\bar{v}}{D},$$

unter dv und $d\bar{v}$ Volumelemente in T_1 , unter D ihre Entfernung verstanden, für die gegebene Gleichgewichtsfigur den kleinsten Wert annimmt.

Es liegt hier, worauf besonders hingewiesen werden mag, ein Variationsproblem folgender Art vor: Jeder geschlossenen Fläche S_1 mit stetiger Normale in der Nachbarschaft erster Ordnung von S , die vorgeschriebenes Volumen einschließt, ist ein Zahlwert Λ_1 zugeordnet¹²⁾. Der Fläche S entspricht ein stationärer Wert des betrachteten Funktionals Λ_1 . Zu untersuchen ist, ob für $S_1 = S$ ein (schwaches) Minimum vorliegt¹³⁾. Diese Aufgabe gehört zu den Problemen einer neuen Variationsrechnung, auf die Herr Hadamard vor einigen Jahren aufmerksam gemacht hatte.

Es sei Λ der Wert von Λ_1 für $S_1 = S$. Der Ausdruck $\Lambda_1 - \Lambda$ darf, wenn T stabil ist, für kein S_1 in einer Umgebung erster Ordnung von S negativ sein. Nehmen wir für einen Augenblick an, daß $\Lambda_1 - \Lambda$ sich in eine Reihe entwickeln läßt, die nach Gliedern verschiedener Ordnung in bezug auf $\xi, \frac{\partial \xi}{\partial \xi}, \frac{\partial \xi}{\partial \eta}$ fortschreitet:

$$10) \quad \Lambda_1 - \Lambda = \Lambda^{(2)} + \Lambda^{(3)} + \dots$$

Unter $\Lambda^{(n)}$ ist hierin ein Ausdruck n -ten Grades in bezug auf $\xi, \frac{\partial \xi}{\partial \xi}, \frac{\partial \xi}{\partial \eta}$ zu verstehen¹⁴⁾. Die Glieder erster Ordnung $\Lambda^{(1)}$ müssen augenscheinlich verschwinden. In Analogie zu den Ergebnissen der gewöhnlichen Variationsrechnung ist zu erwarten, daß für das Eintreten oder nicht Eintreten eines Minimums im allgemeinen das Vorzeichen der „zweiten Variation“ $\Lambda^{(2)}$ entscheidend sein wird und erst, wenn diese verschwinden kann, das Heranziehen höherer Glieder notwendig sein wird.

Mit der Frage der Stabilität Maclaurinscher und Jacobischer Ellipsoide haben sich in erster Linie Liapounoff und Poincaré beschäftigt. In seiner ersten im Jahre 1884 in russischer Sprache erschie-

¹²⁾ Der Wert Λ_1 ist ein „Funktional“.

¹³⁾ Der Übersichtlichkeit halber wird im vierten Kapitel §§ 4 bis 6 zuerst die Schwerpunktsbedingung außer Betracht gelassen, worauf erst in § 7 die endgültigen Stabilitätskriterien angegeben werden.

¹⁴⁾ Geht ξ in $\alpha \xi$ über, so erhält $\Lambda^{(n)}$ den Faktor α^n .

nenen Abhandlung zur Theorie der Gleichgewichtsfiguren hat sich Liapounoff mit der Aufstellung und der Diskussion der Glieder zweiter Ordnung $\Lambda^{(2)}$ beschäftigt, ohne den Rest vollständig abzuschätzen¹⁵⁾. Auch die Schlüsse, zu denen kurz darauf Poincaré gelangt war, stützen sich vor allem auf die Betrachtung der zweiten Variation¹⁶⁾. Erst erheblich später zog Poincaré in dem Falle der birnenförmigen Gleichgewichtsfigur auch noch die Glieder dritter Ordnung heran, freilich auch diesmal ohne den Rest abzuschätzen¹⁷⁾.

Die Ergebnisse, zu denen man auf diese Weise kommt, haben natürlich nur einen sehr bedingten Wert.

Seit 1903 hat Liapounoff eine Reihe grundlegender Abhandlungen zur Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten veröffentlicht¹⁸⁾. In der vierten Abhandlung¹⁹⁾ hat Liapounoff für die Maclaurinschen und die Jacobischen Ellipsoide durch eine lange Kette von Schlüssen einen expliziten Ausdruck für $\Lambda^{(2)}$ sowie eine Abschätzung des Restes abgeleitet. In der von uns benutzten Schreibweise ist

$$(11) \quad \Lambda_1 - \Lambda = - \int_S \gamma \zeta^2 d\sigma - \iint_{S'S} \frac{\zeta \zeta' d\sigma d\sigma'}{\varrho} + \frac{\omega^2}{f \times J} \left(\int_S R^2 \zeta d\sigma \right)^2 + K^*,$$

$$|K^*| < \text{const } N \int_S \zeta^2 d\sigma, \quad N = \text{Max} \left(|\zeta|, \left| \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right|, \left| \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right| \right)^{20)}.$$

¹⁵⁾ Diese Arbeit ist zwanzig Jahre später in französischer Übersetzung ohne wesentliche Änderungen neu erschienen. Vgl. A. Liapounoff, „Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation“, Annales de Toulouse, (2) 6 (1904), S. 5–116.

¹⁶⁾ Vgl. H. Poincaré, „Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation“, Acta mathematica, 7 (1885), S. 259–352.

¹⁷⁾ Vgl. H. Poincaré, „Sur la stabilité de l'équilibre des figures pyriformes affectées par une masse fluide en rotation“, Phil. Transactions A. 198 (1902), S. 333 bis 373 sowie G. H. Darwin, „The stability of the Pear Shaped Figure of Equilibrium of a Rotating Mass of Liquid“, Phil. Transactions A. 200 (1903), S. 251–314.

¹⁸⁾ Vgl. die erste Abhandlung, Fußnote ¹⁰⁾. Den dort zitierten Abhandlungen war die Arbeit: „Recherches dans la théorie des corps célestes“, Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg, Band 14 der achten Reihe, Nr. 7, 1903, S. 1–37 vorausgegangen. Wie ich aus dem Astronomischen Jahresbericht 18 (1919) ersehe, hat Liapounoff im Jahre 1916 die beiden weiteren Abhandlungen veröffentlicht, 1. „Sur les équations qui appartiennent aux surfaces des figures d'équilibre dérivées des ellipsoïdes d'un liquide homogène en rotation“, 2. „Nouvelles considérations relatives à la théorie des figures d'équilibre dérivées des ellipsoïdes dans le cas d'un liquide homogène“, St. Petersburg Bull. 1916.

¹⁹⁾ „Problème de minimum dans une question de stabilité des figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation“, Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg, Band 22 der achten Reihe, Nr. 5, 1908, S. 1–140.

²⁰⁾ Der von Liapounoff abgeleitete auf die Ellipsoide bezügliche spezielle Ausdruck sieht etwas anders aus, einmal wegen der sogliche zu besprechenden Zerlegung von $\Lambda_1 - \Lambda$ in zwei Summanden, dann aber auch darum, weil bei Liapounoff die Lage der Punkte von S_1 durch ein anderes System krummliniger Koordinaten bestimmt wird (vgl. den ersten Teil dieser Abhandlung S. 248).

Damit war die Grundlage für eine lückenlose Behandlung der Stabilität ellipsoidischer Gleichgewichtsfiguren gewonnen. Liapounoff gibt an der bezeichneten Stelle Kriterien für die Stabilität der Flüssigkeitsellipsoide sowie der neuen Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der Verzweigungsellipsoide an. Er untersucht ferner gewisse Fälle bedingter Stabilität. Der ziffernmäßigen Anwendung der allgemeinen Sätze, namentlich im Falle der birnenförmigen Figuren, sind die Abhandlungen 3. und 4. (vgl. meine erste Abhandlung, Fußnote ¹⁰⁾) gewidmet.

Liapounoff bedient sich übrigens nicht unmittelbar des Ausdrucks (11) für $\Lambda_1 - \Lambda$, sondern schaltet zwischen T und T_1 eine geeignete Zwischenfigur $\tilde{T}_1$ ein und setzt dementsprechend

$$(12) \quad \Lambda_1 - \Lambda = (\Lambda_1 - \tilde{\Lambda}_1) + (\tilde{\Lambda}_1 - \Lambda).$$

Die beiden Summanden $\Lambda_1 - \tilde{\Lambda}_1$ und $\tilde{\Lambda}_1 - \Lambda$ werden nun einzeln betrachtet. Für $\Lambda_1 - \tilde{\Lambda}_1$ wird ein zu (11) analoger von einer willkürlichen Funktion abhängiger Ausdruck nebst einer Abschätzung des Restes abgeleitet; $\Lambda_1 - \tilde{\Lambda}_1$ hängt lediglich von einem oder mehreren Parametern ab. Diese Zerlegung leistet namentlich bei der Untersuchung der Stabilität der Verzweigungsellipsoide sowie der benachbarten neuen Figuren wichtige Dienste.

Die eingehenden, sehr umfangreichen Untersuchungen von Herrn Liapounoff sind den besonderen Eigenschaften der ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren angepaßt und dürften sich nicht ohne schwierige Spezialbetrachtungen und auch dann nicht in allen Teilen auf andere Gleichgewichtsfiguren übertragen lassen. Aber auch in dem besonderen Falle der Maclaurinschen und Jacobischen Ellipsoide erscheint es erwünscht, für die allgemeinen Sätze einen kürzeren Beweis zu besitzen.

In den beiden ersten Paragraphen des vierten Kapitels dieser Abhandlung wird unter Benutzung der Methoden und der Resultate des ersten Kapitels durch ganz einfache Überlegungen der vollständige Ausdruck (10) für $\Lambda_1 - \Lambda$ für beliebige Gleichgewichtsfiguren abgeleitet. Es gilt:

$$(13) \quad \Lambda_1 - \Lambda = -\frac{\omega^2}{f_x} \Delta J + \frac{\omega^2}{f_x} \frac{(\Delta J)^2}{J} \left(1 - \frac{\Delta J}{J} + \left(\frac{\Delta J}{J} \right)^2 - \dots \right) \\ - 2 \int_0^1 dt \int_{S_t} \zeta \cos \varphi_t [U + t U^{(1)} + t^2 U^{(2)} + \dots] d\sigma_t.$$

Mit S_t ist hier die Fläche $S + t(S_t - S)$ mit den krummlinigen Koordinaten $\xi, \eta, t\zeta$ ($0 \leq t \leq 1$) bezeichnet. Die auf S_t bezüglichen Werte sind durch den Index t gekennzeichnet. Es ist ferner

$$(14) \quad \Delta J = \int_0^1 dt \int_{S_t} R_t^2 \zeta \cos \varphi_t d\sigma_t.$$

Für den Rest $\Lambda^{(3)} + \Lambda^{(4)} + \dots$ ergibt sich dabei ohne jede Schwierigkeit die zu der Liapounoffschen analoge, diesmal *allgemein gültige* Abschätzung (11).

Den nächsten Schritt (§ 4) bildet die Elimination der der Funktion ζ durch das Verschwinden des Volumens $T_1 - T$ und die vorgeschriebene Lage des Schwerpunktes von T_1 aufgezwungenen Nebenbedingungen. Man gewinnt für $\Lambda_1 - \Lambda$ einen Ausdruck, den wir hier für den besonders einfachen Fall einer aus nur einer zusammenhängenden Masse bestehenden Gleichgewichtsfigur und der einen Nebenbedingung, Volumen von $T_1 - T$ gleich Null, hinschreiben wollen. Es gilt

$$(15) \quad \Lambda_1 - \Lambda = - \int_S \psi \zeta^2 d\sigma - \int_S \left(\frac{1}{\varrho} + Q \right) \zeta' d\sigma' + \mathfrak{R}^*,$$

$$|\mathfrak{R}^*| < \text{const } \mathfrak{R} \int_S \zeta^2 d\sigma, \quad \mathfrak{R} = \text{Max} \left(|\zeta|, \left| \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right|, \left| \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right| \right).$$

Hier bezeichnet ζ eine beliebige nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Ortsfunktion auf S , Q eine gewisse symmetrische Funktion der Punkte σ und σ' . Es ist schließlich

$$(16) \quad \zeta = \zeta - \dot{u} \int_S \zeta d\sigma \frac{1}{\int_S \dot{u} d\sigma} + \dot{u} L\{\zeta\}^{21}.$$

Einen ähnlichen Ausdruck erhält man, wenn die Lage des Schwerpunktes vorgeschrieben ist oder wenn geeignete weitere Nebenbedingungen vorliegen (Fälle bedingter Stabilität).

Die Integralgleichung

$$(17) \quad \psi \zeta + \mu \int_S \left(\frac{1}{\varrho} + Q \right) \zeta' d\sigma' = 0$$

hat eine Reihe zu dem Eigenwert $\mu = 1$ gehöriger trivialer Nulllösungen.

Es seien μ_j ($j = 1, 2, \dots$) die nach Ausschluß der trivialen Nulllösungen zurückbleibenden positiven, μ_j ($j = -1, -2, \dots$) die etwaigen negativen Eigenwerte. Die Werte $\frac{1}{\mu_j} - 1$ sind die Poincaréschen „Stabilitätskoeffizienten“.

Ist der kleinste positive Eigenwert $\mu_1 > 1$, so ist die Figur T stabil. Sie ist labil, wenn $\mu_1 < 1$ ist. Der Fall $\mu_1 = 1$ bleibt vorderhand noch unentschieden.

²¹⁾ In (16) bezeichnet $\dot{u}$ eine beliebige in bezug auf die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ symmetrische Funktion, die so beschaffen ist, daß $\int_S \dot{u} d\sigma$ nicht verschwindet; $L\{\zeta\}$ ist ein Integralausdruck über ζ und $D_1 \zeta$, der nur Glieder zweiten und höheren Grades enthält. Man darf, ohne Einschränkung der Allgemeinheit, $\int_S \psi \zeta \dot{u} d\sigma = 0$, $\int_S \psi \zeta u_1 d\sigma = 0$, $\int_S \psi \zeta u_2 d\sigma = 0$ voraussetzen.

Für astronomische Anwendungen ist nicht so sehr der Stabilitätscharakter einer einzelnen Gleichgewichtsfigur, als vielmehr derjenige der aus ihr abgeleiteten linearen Reihe von Wichtigkeit. Ist $\mu_1 > 1$ oder $\mu_1 < 1$, so tritt in T kein Wechsel des Stabilitätscharakters statt. Ist aber $\mu_1 = 1$, so hängt der Charakter der Nachbarfiguren zunächst davon ab, ob dort $\mu_1 > 1$ oder < 1 ist. Sei Θ eine von T ausgehende, etwa reguläre einparametrische Reihe von Gleichgewichtsfiguren

$$(18) \quad \zeta(\xi, \eta) = \sum_{l=1}^{\infty} d_l(\xi, \eta) \lambda^l, \quad (\lambda \text{ reell})$$

und es sei $\hat{T}$ ein Individuum von Θ .

Im fünften Kapitel (§§ 1 und 2) wird, um nur das einfachste zu erwähnen, durch vertiefte Diskussion der zu $\hat{T}$ gehörigen zu (17) analogen Integralgleichung für den kleinsten positiven Eigenwert $\hat{\mu}_1$ ein Ausdruck von der Form

$$(19) \quad \hat{\mu}_1 = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} g_l \lambda^l$$

abgeleitet, unter g_l explizit angebbare Werte verstanden. Eine Entscheidung wird durch dieses Ergebnis nur dann nicht gegeben, wenn etwa alle g_l verschwinden sollten.

Das bei der Ableitung der Formel (19) zu lösende mathematische Problem läßt sich wie folgt beschreiben:

Es liege eine einparametrische analytische Schar linearer homogener Integralgleichungen mit symmetrischem Kern, und es sei bekannt, daß ein Individuum der Schar etwa den Eigenwert 1 hat. Die einzelnen Eigenwerte sind analytische Funktionen des Parameters der Schar. Wie hängt derjenige Eigenwert, der für die betrachtete spezielle Integralgleichung den Wert 1 hat, von dem Parameter ab?

Die in dem fünften Kapitel entwickelte Methode eröffnet einen neuen Weg für die Bestimmung des Stabilitätscharakters der birnenförmigen Gleichgewichtsfiguren.

Die vorstehenden Resultate gelten mutatis mutandis in dem allgemeineren Falle einer Flüssigkeit, auf die mitrotierende äußere Felder, insbesondere Gravitationskräfte mitrotierender starrer Massen einwirken (vgl. § 8 des vierten Kapitels).

Die Untersuchung des Stabilitätscharakters einer Gleichgewichtsfigur, wenn $\mu_1 = 1$ ist, behalte ich, um den Umfang dieser Arbeit nicht noch größer werden zu lassen, für eine spätere Gelegenheit vor. In dem § 3 des fünften Kapitels wird eine für die Stabilität notwendige Bedingung abgeleitet.

Als ein Anwendungsbeispiel der allgemeinen Theorie wird in § 1 des sechsten Kapitels das von Laplace und Poincaré betrachtete Problem des Gleichgewichtes einer über einem starren Kern ausgebreiteten Flüssigkeitsschicht ausführlicher behandelt. Hieran schließen sich in § 2 einige Bemerkungen über die Maclaurinschen und die Jacobischen Ellipsoide an.

Die Ergebnisse und Methoden dieser Arbeit eröffnen eine Aussicht auf eine mathematisch befriedigende Theorie der Gezeiten. Eine andere Anwendung bietet die Theorie der Figur des Erdmondes. Ich gedenke auf diese und andere Anwendungen in einer Reihe weiterer Abhandlungen im einzelnen einzugehen.

Erstes Kapitel. Problemstellung.

§ 1.

Bezeichnungen und allgemeine Sätze (zum Teil Referat).

In dem Raume der kartesischen Koordinaten x, y, z sei eine Anzahl $q (\geq 1)$ Gebiete, deren Gesamtheit mit T bezeichnet werden soll, gegeben. Die Begrenzung S von T möge zunächst aus einer endlichen Anzahl geschlossener stetiger doppelpunktfreier (Jordanscher) Flächen bestehen, die einzelne (auch unendlich viele) Punkte miteinander gemeinsam haben können. Den Raum T denken wir uns mit einer homogenen Flüssigkeit der Dichte f erfüllt, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen. Weitere Kräfte liegen nicht vor, insbesondere soll der Außendruck gleich Null sein.

Wir bezeichnen die laufenden Koordinaten eines Punktes auf S mit X, Y, Z , das Newtonsche Potential von T mit $V(x, y, z)$, die Gaußsche Gravitationskonstante mit κ .

Die Flüssigkeit soll um die z -Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω wie ein starrer Körper gleichförmig rotieren. Damit das (relative) Gleichgewicht möglich sei, muß der Ausdruck

$$(1) \quad V(X, Y, Z) + \frac{\omega^2}{2\kappa f} (X^2 + Y^2)$$

auf jeder Komponente von S einen konstanten Wert haben²²⁾. Aus dieser notwendigen Bedingung folgt bereits, wie ich neuerdings bewiesen habe,

²²⁾ Sollten zwei oder mehr Randkomponenten der Begrenzung derselben Flüssigkeitsmasse angehören, so müßten die zugehörigen Konstanten denselben Wert haben. Dieser Fall kann indessen nicht eintreten. Die Begrenzung jeder einzelnen Flüssigkeitsmasse besteht aus einer zusammenhängenden Fläche, — man vergleiche weiter unten S. 137.

daß die Winkelgeschwindigkeit ω unterhalb der Poincaréschen Schranke ($2\pi\kappa f$ liegen muß²³⁾,

$$2) \quad \omega < \sqrt{2\pi\kappa f}.$$

ist die Bedingung (1) erfüllt, so herrscht in T überall Druck. Die Bedingung (1) ist für das Gleichgewicht auch hinreichend²⁴⁾.

Wie ich in der in der Fußnote ⁴⁾ zitierten Arbeit weiter gezeigt habe, hat jede Gleichgewichtsfigur eine auf der Rotationsachse senkrechte Symmetrieebene²⁵⁾. Wir wählen sie zur Ebene $z = 0$. Der Schwerpunkt der Figur, der stets auf der Rotationsachse liegen muß (vgl. loc. cit. ⁴⁾ S. 1121) liegt also im Koordinatenursprung. Keine zu der Rotationsachse parallele Gerade kann mit S mehr als zwei Punkte gemeinsam haben²⁶⁾. Die Begrenzung jeder Einzelmasse besteht aus einer einzigen Randkomponente, so daß Hohlräume im Innern ausgeschlossen sind. Besteht T aus mehreren Einzelmassen und haben diese Massen Punkte der Begrenzung miteinander gemeinsam, so liegen diese Punkte stets auf der Symmetrieebene²⁷⁾. Außer höchstens auf der Symmetrieebene ist die Schwerkraft, d. h. die Resultierende aus der Anziehungs- und der Zentrifugalkraft auf S von Null verschieden²⁸⁾. Außer höchstens auf der Symmetrieebene hat darum S eine stetige Normale²⁹⁾. Außer höchstens auf der Symmetrieebene kann man darum die Lage der Punkte auf S durch Systeme Gaußscher Parameter ξ, η bestimmen, so daß die Gleichung von S in der Form

$$3) \quad x = X(\xi, \eta), \quad y = Y(\xi, \eta), \quad z = Z(\xi, \eta)$$

²³⁾ Poincaré leitet die Bedingung (2) aus der Forderung ab, daß auf S kein Zug herrschen darf. Sie gilt aber auch dann, wenn angenommen wird, daß die Flüssigkeit den Zugkräften widerstehen kann. Vgl. L. Lichtenstein, loc. cit. ⁴⁾ S. 1127. Es sei bemerkt, daß der a. a. O. gegebene Beweis von den Ergebnissen dieser und der ersten Abhandlung unabhängig ist.

²⁴⁾ Vgl. loc. cit. ⁴⁾, S. 1128–1129.

²⁵⁾ Vgl. loc. cit. ⁴⁾, S. 1124–1125.

²⁶⁾ Vgl. loc. cit. ⁴⁾, S. 1124–1125. Der a. a. O. gegebene Beweis ist insofern noch nicht ganz vollständig, als dort die Möglichkeit offen bleibt, daß S mit einzelnen in der z -Achse parallelen Geraden Strecken gemeinsam hat. Daß dies nicht eintreten kann, läßt sich indessen leicht durch eine Betrachtung nachweisen, die der a. a. O. S. 1129 durchgeführten Überlegung ganz analog ist.

²⁷⁾ Vgl. loc. cit. ⁴⁾, S. 1125.

²⁸⁾ Siehe loc. cit. ⁴⁾, S. 1130.

²⁹⁾ In einem Punkte, in dem die Schwerkraft von Null verschieden ist, hat S eine stetige Normale. Siehe loc. cit. ⁴⁾, S. 1122. Singularitäten der Begrenzung können also nur dort auftreten, wo die Schwerkraft verschwindet. Ist die Oberfläche stetig gekrümmt, so ist die Schwerkraft auf S durchweg von Null verschieden. Vgl. loc. cit. ⁴⁾, S. 1130–1132.

erscheint, unter X, Y, Z Funktionen verstanden, die stetige Ableitungen erster Ordnung haben. Der Ausdruck

$$(4) \quad \left[\frac{\partial(X, Y)}{\partial(\xi, \eta)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(Y, Z)}{\partial(\xi, \eta)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(Z, X)}{\partial(\xi, \eta)} \right]^2$$

ist außerhalb der Symmetrieebene sicher nirgends gleich Null.

Wir nehmen an, daß T aus *getrennten* Einzelmassen besteht und daß auch auf der Symmetrieebene die Schwerkraft von Null verschieden ist. Dann hat S überall eine stetige Normale und gestattet überall eine Darstellung von der Form (3). Wie ich in der ersten Abhandlung bewiesen habe, kann man die Gaußschen Parameter ξ, η so wählen, daß die Funktionen X, Y, Z stetige Ableitungen aller Ordnungen³⁰⁾ besitzen. Wir nehmen an, daß die Parameter ξ, η tatsächlich diese Eigenschaft haben. Wir setzen ferner voraus, daß T eine durch die Rotationsachse hindurchgehende Ebene, die Ebene $y = 0$, zur Symmetrieebene hat³¹⁾. Die Rotationsachse ist offenbar eine Hauptträgheitsachse des Körpers³²⁾.

Indem Stabilitätsfragen zunächst außer Betracht bleiben, wollen wir untersuchen, ob es für Werte der Winkelgeschwindigkeit ω_1 in einem hinreichend kleinen Intervall, das ω in seinem Innern oder auf dem Rande enthält, in der Umgebung des Körpers T weitere Figuren T_1 des relativen Gleichgewichtes gibt, die eine *lineare Reihe* bilden. Darunter ist folgendes zu verstehen.

Die Berandung S_1 von T_1 soll aus einer endlichen Anzahl geschlossener, doppelpunktloser Flächenschalen mit stetiger Normale bestehen, die einander nicht berühren, den einzelnen Komponenten von S umkehrbar eindeutig zugeordnet sind und gegen diese für $\omega_1 \rightarrow \omega$ konvergieren³³⁾.

Allgemeiner verstehen wir unter einer linearen Reihe von Gleichgewichtsfiguren jede von einem oder mehreren Parametern abhängige stetige Schar von Gleichgewichtsfiguren.

Ist T_1 eine Gleichgewichtsfigur, so sind augenscheinlich Körper, die man durch eine beliebige Verschiebung oder Drehung von T_1 um die z -Achse erhält, ebenfalls Gleichgewichtsfiguren. Desgleichen ist, wie man sich leicht überzeugt, jeder in bezug auf den Koordinatenursprung zu T_1 ähnliche Körper eine zu der Winkelgeschwindigkeit ω_1 gehörige Gleichgewichtsfigur.

³⁰⁾ Siehe loc. cit. 1), S. 270–276.

³¹⁾ Diese Bedingung ist bei allen bisher bekannten oder vermuteten Gleichgewichtsfiguren erfüllt.

³²⁾ Vgl. loc. cit. 4). S. 1121 und S. 1125. Zur Vereinfachung wird im folgenden stets von *einem*, unter Umständen aus mehreren Einzelmassen bestehenden, Körper die Rede sein.

³³⁾ Genauer, der Höchstwert der Entfernung eines beliebigen Punktes P auf irgendeiner Komponente von S von der zugehörigen Komponente von S_1 soll für $\omega_1 \rightarrow \omega$ gegen Null konvergieren.

Sind X, Y, Z und X_1, Y_1, Z_1 laufende Koordinaten zweier Punkte auf einem beliebigen Paar zusammengehöriger Komponenten von S und S_1 und ist $V_1(x, y, z)$ das Newtonsche Potential des Körpers T_1 , so muß

$$V_1(X_1, Y_1, Z_1) - V(X, Y, Z) = \frac{\omega^2}{2\pi f}(X^2 + Y^2) - \frac{\omega_1^2}{2\pi f}(X_1^2 + Y_1^2) + s$$

Der reelle Parameter s nimmt auf dem Rande einer jeden Einzelmasse einen konstanten Wert an. Ist die Anzahl getrennter Flüssigkeitsmassen $q > 1$, so ist unter s kurz die Gesamtheit der Einzelwerte des Parameters, etwa $s_1, \dots, s_q$ zu verstehen. Offenbar konvergiert für $\omega_1 \rightarrow \omega$ gegen Null.

Die Größen $s_1, \dots, s_q$ sind, allgemein zu reden, durch die Forderung bestimmen, daß das Volumen jeder Einzelmasse einen vorgeschriebenen Wert hat.

Besteht die gegebene Gleichgewichtsfigur aus einer einzigen Masse, können wir einfacher

$$V_1(X_1, Y_1, Z_1) - V(X, Y, Z) = \frac{\omega^2}{2\pi f}(X^2 + Y^2) - \frac{\omega_1^2}{2\pi f}(X_1^2 + Y_1^2),$$

h. $s = 0$ setzen. Ist eine der Gleichung (6) genügende lineare Reihe bestimmt, so gewinnt man eine lineare Reihe konstanten Volumens durch eine geeignete Ähnlichkeitstransformation³⁴⁾.

In dem Punkte (ξ, η) auf S denken wir uns die Normale (ν) gegen und auf dieser, positiv nach außen gerichtet, eine Strecke ζ auftragen. Solange $|\zeta|$ kleiner als das Minimum der beiden Hauptkrümmungsradien auf S , etwa

$$|\zeta| < \varepsilon_0$$

gehört zu einem jeden Wertsystem ξ, η, ζ nur ein Punkt des Raumes und umgekehrt. Wir nehmen an, daß die Gleichung der Fläche S_1 , die in ω_1 stetig abhängen soll, auf die Form

$$\zeta = \zeta(\xi, \eta, \omega_1)$$

gebracht werden kann. Die Funktion $\zeta(\xi, \eta, \omega_1)$ soll stetige partielle Ableitungen erster Ordnung $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$ haben.

Diese Bedingungen sind stets erfüllt, wenn der Höchstwert der Entfernung eines Punktes auf S_1 von S und der Wert $|\omega_1 - \omega|$ unterhalb einer angebbaren Schranke liegen³⁵⁾.

³⁴⁾ Vgl. Abh. I, S. 238.

³⁵⁾ Vgl. Abh. I, Kap. IV, § 1.

Wir bezeichnen wie in der ersten Abhandlung mit R die Entfernung des Punktes (ξ, η) von der z -Achse, mit τ den Kosinus der von (ν) und dem Lote von (ξ, η) auf die Umdrehungsachse, von dieser nach (ξ, η) hin gerichtet, eingeschlossenen Winkel, mit $d\sigma$ das Flächenelement in (ξ, η) . Die entsprechenden Werte im Punkte (ξ', η') auf S sollen $R', \tau', d\sigma'$ heißen. Die Entfernung der Punkte (ξ, η) und (ξ', η') sei ϱ . Für (ξ, η) , (ξ', η') wird öfter σ, σ' geschrieben.

Wir setzen, wenn (ξ, η, ζ^*) den Punkt (x, y, z) bezeichnet,

$$(9) \quad V(x, y, z) = W(\xi, \eta, \zeta^*), \quad V_1(x, y, z) = W_1(\xi, \eta, \zeta^*).$$

Die Komponente der von dem Körper T in dem Punkte (ξ, η) seiner Oberfläche auf einen materiellen Punkt von der Masse 1 ausgeübten Anziehungskraft in der Richtung von (ν) hat den Wert

$$f\kappa \frac{\partial}{\partial \nu} W(\xi, \eta, 0).$$

Die Schwerkraft im Punkte (ξ, η) steht auf S senkrecht und ist (positiv nach außen gerichtet) gleich

$$(10) \quad f\kappa \frac{\partial}{\partial \nu} W(\xi, \eta, 0) + \omega^2 R\tau = f\kappa\psi.$$

Der Wert dieser Ortsfunktion im Punkte (ξ', η') wird mit $f\kappa\psi'$ bezeichnet. Den Ausführungen zu Eingang dieses Paragraphen gemäß ist $\psi' < 0$.

§ 2.

Die fundamentale Integro-Differentialgleichung.

Es sei (ξ, η, ζ) der Punkt (X_1, Y_1, Z_1) auf S_1 . Wir setzen

$$(11) \quad V_1(X_1, Y_1, Z_1) = U_1(\xi, \eta)$$

und analog, wenn (ξ, η) den Punkt (X, Y, Z) auf S bezeichnet,

$$(12) \quad V(X, Y, Z) = U(\xi, \eta).$$

Der Ausdruck $U_1 - U$ läßt sich, wie in der Abb. I bewiesen worden ist, in eine für hinreichend kleine Werte von $|\zeta|$, $\left| \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right|$, $\left| \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right|$ unbedingt und gleichmäßig konvergierende Reihe

$$(13) \quad U_1 - U = U^{(1)} + U^{(2)} + U^{(3)} + \dots$$

entwickeln, die folgende Eigenschaften hat:

1. Es ist

$$(14) \quad U^{(n)} = \int_S \frac{1}{\varrho^n} K^{(n)} d\sigma',$$

unter $K^{(n)}$ eine Form n -ten Grades der Variablen $\xi, \xi', \frac{\partial \xi'}{\partial \xi}, \frac{\partial \xi'}{\partial \eta}$ verstanden.

2. Es gilt

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi} (U_1 - U) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_S \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\varrho^n} K^{(n)} \right) d\sigma', \\ \frac{\partial}{\partial \eta} (U_1 - U) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_S \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\varrho^n} K^{(n)} \right) d\sigma'. \end{cases}$$

Die unendlichen Reihen rechter Hand konvergieren unbedingt und gleichmäßig.

Die Reihen (13) und (15) konvergieren, wie gleichzeitig gezeigt werden wird, auch wenn für $\xi, \frac{\partial \xi}{\partial \xi}, \frac{\partial \xi}{\partial \eta}$ dem absoluten Betrage nach hinreichend kleine komplexe Werte eingesetzt werden. Die Reihe (13) ist als Definitionsgleichung von U_1 für komplexe ξ aufzufassen.

Da einzelne methodische Gedanken des Beweises, sowie manche Zwischensformeln bei der später durchzuführenden Stabilitätsbetrachtungen gebraucht werden, so soll in den folgenden Zeilen jener Beweis kurz reproduziert werden.

Neben den Flächen S und S_1 betrachten wir die einparametrische Flächenschar S_t ($0 \leq t \leq 1$), die sich symbolisch in der Form $S + t(S_1 - S)$ darstellen läßt. Dem Punkte (ξ, η) auf S entspricht auf S_t ein Punkt mit den (krummlinigen) Koordinaten $\xi, \eta, t\xi$. Der von S_t begrenzte Körper heiße T , sein Potential im Punkte (ξ, η, ξ^*) sei $W_t(\xi, \eta, \xi^*)$ und insbesondere im Punkte $\xi, \eta, t\xi$ auf S_t einfacher $U_t(\xi, \eta)$.

Der Beweis des soeben angegebenen Satzes wird dadurch erbracht, daß die Differenz $U_t(\xi, \eta) - U(\xi, \eta)$ nach Potenzen von t entwickelt wird. In der sich ergebenden unendlichen Reihe wird alsdann $t=1$ gesetzt.

Wir beginnen mit der Herleitung eines Ausdruckes für $\frac{\partial U_t}{\partial t}$. Es gilt

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{1}{h} (U_{t+h} - U_t) = \frac{1}{h} \{ W_{t+h}[\xi, \eta, (t+h)\xi] - W_t(\xi, \eta, t\xi) \} \\ \quad = \frac{1}{h} \{ W_{t+h}[\xi, \eta, (t+h)\xi] - W_{t+h}(\xi, \eta, t\xi) \} \\ \quad + \frac{1}{h} \{ W_{t+h}(\xi, \eta, t\xi) - W_t(\xi, \eta, t\xi) \}. \end{cases}$$

Der Ausdruck

$$(17) \quad W_{t+h}(\xi, \eta, t\xi) - W_t(\xi, \eta, t\xi)$$

stellt das Potential des schalenförmigen Körpers $T_{t+h} - T_t$ im Punkte $\xi, \eta, t\xi$ auf S_t dar. Es sei φ_t der von der Außennormale an S_t in diesem

Punkte mit der Geraden (ν) eingeschlossene Winkel, $d\sigma'_i$ das Flächenelement von S_i in $(\xi', \eta', t\zeta')$ und ϱ_i die Entfernung der Punkte $(\xi, \eta, t\zeta)$ und $(\xi', \eta', t\zeta')$. Von den Normalen an S durch den Rand von $d\sigma'_i$ wird aus $T_{t+h} - T_t$ ein Volumen herausgeschnitten, das, positiv oder negativ angesetzt, je nachdem $\zeta' > 0$ oder < 0 ist, bis auf die Größen höhere Ordnung in bezug auf h , den Wert

$$(18) \quad \zeta' h \cos \varphi'_i d\sigma'_i$$

hat. Das zweite Glied rechts in (17) liefert demnach für $h \rightarrow 0$, wie sich ohne Schwierigkeiten zeigen läßt (man vergleiche die Fußnote ²³) der Abh. I),

$$(19) \quad \int_{S_i} \frac{1}{\varrho_i} \zeta' \cos \varphi'_i d\sigma'_i.$$

Der erste Summand gibt für $h \rightarrow 0$ den Wert

$$(20) \quad \zeta \frac{\partial}{\partial \nu} W_i(\xi, \eta, t\zeta),$$

der sich nach einer teilweisen Integration in bekannter Weise auf die Form

$$(21) \quad - \zeta \int_{S_i} \frac{1}{\varrho_i} \cos \theta'_i d\sigma'_i$$

bringen läßt (man vergleiche hierzu die Fußnote ²⁴) der Abh. I). In (21) bezeichnet θ'_i den von der Außennormale an S_i im Punkte $(\xi', \eta', t\zeta')$ mit der Geraden (ν) eingeschlossenen Winkel.

Es gilt demnach

$$(22) \quad \begin{aligned} \frac{\partial U_t}{\partial t} &= \zeta \frac{\partial}{\partial \nu} W_t(\xi, \eta, t\zeta) + \int_{S_i} \frac{1}{\varrho_i} \zeta' \cos \varphi'_i d\sigma'_i \\ &= \int_{S_i} \frac{1}{\varrho_i} (\zeta' \cos \varphi'_i - \zeta \cos \theta'_i) d\sigma'_i. \end{aligned}$$

Sind

$$(23) \quad x = X(\xi, \eta), \quad y = Y(\xi, \eta), \quad z = Z(\xi, \eta)$$

die Gleichungen von S , so lauten diejenigen der Fläche S_i

$$(24) \quad x = X + at\zeta, \quad y = Y + bt\zeta, \quad z = Z + ct\zeta,$$

unter a, b, c die Richtungskosinus der Normale (ν) verstanden. Es gilt

$$(25) \quad \begin{aligned} d\sigma'_i &= d\xi' d\eta' \sqrt{A_i'^2 + B_i'^2 + C_i'^2}, \\ A'_i &= \frac{\partial(Y' + b't\zeta', Z' + c't\zeta')}{\partial(\xi', \eta')}, \quad B'_i = \frac{\partial(Z' + c't\zeta', X' + a't\zeta')}{\partial(\xi', \eta')}, \\ C'_i &= \frac{\partial(X' + a't\zeta', Y' + b't\zeta')}{\partial(\xi', \eta')}, \\ \cos \varphi'_i &= \frac{a'A'_i + b'B'_i + c'C'_i}{\sqrt{A_i'^2 + B_i'^2 + C_i'^2}}, \quad \cos \theta'_i = \frac{aA'_i + bB'_i + cC'_i}{\sqrt{A_i'^2 + B_i'^2 + C_i'^2}}. \end{aligned}$$

mithin in naheliegender Schreibweise

$$(26) \quad \frac{\partial U_t}{\partial t} = \int_S \frac{1}{\varrho_t} \sum A'_i (a' \zeta' - a \zeta) d\xi' d\eta'.$$

Wir denken uns die Parameter ξ, η so gewählt, daß in den Formeln (25) die Quadratwurzel mit dem positiven Zeichen zu verstehen ist.

Aus (24) und den analogen Ausdrücken für die kartesischen Koordinaten des Punktes $(\xi', \eta', t\zeta')$ auf S_t ergibt sich

$$(27) \quad \varrho_t^2 = \varrho^2 + 2t \sum (X' - X)(a' \zeta' - a \zeta) + t^2 \sum (a' \zeta' - a \zeta)^2 \\ = \varrho^2 [1 + k(t)].$$

Es sei t^* eine Zahl > 1 und k^* ein positiver echter Bruch. Wie man sich leicht überzeugt, ist für alle dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen reellen oder komplexen Werte von $\zeta, \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$, etwa

$$(28) \quad |\zeta|, \left| \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right|, \left| \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right| \leq \varepsilon < \varepsilon_0,$$

und alle komplexen t in dem Bereiche $|t| \leq t^*$

$$(29) \quad |k(t)| \leq k^*.$$

Der Quotient $\left| \frac{\varrho_t}{\varrho} \right|$ ist demnach von Null verschieden.

Das Integral

$$(30) \quad J = \int_S \frac{1}{\varrho_t} \sum A'_i (a' \zeta' - a \zeta) d\xi' d\eta' \\ = \int_S \frac{1}{\varrho} \frac{1}{\sqrt{1+k(t)}} \sum A'_i (a' \zeta' - a \zeta) d\xi' d\eta'$$

ist eine in dem Bereiche $|t| \leq t^*$ analytische und reguläre Funktion von t .

Dies erkennt man wohl am einfachsten wie folgt. Man setze

$$(31) \quad \int = \int_{s-\bar{s}} + \int_{\bar{s}},$$

unter $\bar{s}$ den in der Kreisfläche $(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 \leq \bar{D}^2$ in der Nachbarschaft von (ξ, η) enthaltenen Teil von S verstanden. Das Integral $\int_{s-\bar{s}}$ ist,

wie man unmittelbar sieht, eine analytische und reguläre Funktion von t . Berücksichtigt man, daß $\left| \int_{\bar{s}} \right|$ für alle (ξ, η) auf S und alle t im Bereiche $|t| \leq t^*$ für $\bar{D} \rightarrow 0$ gleichmäßig verschwindet, daß mithin gleichmäßig

$$(32) \quad \int = \lim_{\bar{D} \rightarrow 0} \int_{s-\bar{s}}$$

gilt, so erhält man in der Tat unsere Behauptung. In der gleichen Weise läßt sich zeigen, daß auch die partiellen Ableitungen $\frac{\partial J}{\partial \xi}$, $\frac{\partial J}{\partial \eta}$, als Funktionen von t aufgefaßt, analytisch und regulär sind.

Nach bekannten Sätzen ist für alle $n > 1$

$$(33) \quad \frac{\partial^{n-1} J}{\partial t^{n-1}} = \lim_{\bar{D}=0} \int_{S-\bar{S}} \sum (a' \zeta' - a \zeta) \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left(\frac{A'_t}{\varrho_t} \right) d\xi' d\eta' \\ = \int_S \sum (a' \zeta' - a \zeta) \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left(\frac{A'_t}{\varrho_t} \right) d\xi' d\eta'.$$

Der Grenzübergang ist für alle (ξ, η) auf S und alle t im Bereiche $|t| \leq t^*$ gleichmäßig.

Man sieht jetzt leicht ein, daß $U_t(\xi, \eta)$, sofern

$$(34) \quad |\zeta|, \quad \left| \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right|, \quad \left| \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right| \leq \varepsilon$$

angenommen wird, eine für alle t in dem Intervalle $0 \leq t \leq t^*$ analytische und reguläre Funktion von t darstellt, die über den Bereich $|t| \leq t^*$ regulär fortgesetzt werden kann. Es gilt (für $n \geq 3$)

$$(35) \quad \frac{\partial^n U_t}{\partial t^n} = \frac{\partial^{n-1} J}{\partial t^{n-1}} = \int_S \sum (a' \zeta' - a \zeta) \left\{ A'_t \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left(\frac{1}{\varrho_t} \right) \right. \\ \left. + \binom{n-1}{1} \frac{\partial A'_t}{\partial t} \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \left(\frac{1}{\varrho_t} \right) + \binom{n-1}{2} \frac{\partial^2 A'_t}{\partial t^2} \frac{\partial^{n-3}}{\partial t^{n-3}} \left(\frac{1}{\varrho_t} \right) \right\} d\xi' d\eta'.$$

Der Ausdruck $\left[\frac{\partial^n U_t}{\partial t^n} \right]_{t=0}$ läßt sich demnach, wie leicht ersichtlich, auf die Gestalt $n! \int_S \frac{1}{\varrho^n} K^{(n)} d\sigma'$ bringen, unter $K^{(n)}$ eine Form n -ten Grades von $\zeta, \zeta', \frac{\partial \zeta'}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta'}{\partial \eta}$ verstanden. Jede der zuletzt genannten partiellen Ableitungen kommt in $K^{(n)}$ übrigens nur linear vor.

Der Taylor-Cauchysche Entwicklungssatz liefert

$$(36) \quad U_t(\xi, \eta) - U(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left[\frac{\partial^n U_t}{\partial t^n} \right]_{t=0}$$

und für $t=1$, wie behauptet,

$$(37) \quad U_1 - U = U^{(1)} + U^{(2)} + U^{(3)} + \dots \\ U^{(n)} = \frac{1}{n!} \left[\frac{\partial^n U_t}{\partial t^n} \right]_{t=0} = \int_S \frac{1}{\varrho^n} K^{(n)} d\sigma',$$

$$8) \quad \frac{1}{\varrho^n} K^{(n)} = \frac{1}{n!} \frac{1}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}} \sum (a' \zeta' - a \zeta) \left\{ A'_t \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left(\frac{1}{\varrho_t} \right) + \binom{n-1}{1} \frac{\partial A'_t}{\partial t} \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \left(\frac{1}{\varrho_t} \right) + \binom{n-1}{2} \frac{\partial^2 A'_t}{\partial t^2} \frac{\partial^{n-3}}{\partial t^{n-3}} \left(\frac{1}{\varrho_t} \right) \right\}_{t=0},$$

$$9) \quad A' = \frac{\partial(Y', Z')}{\partial(\xi', \eta')}, \quad B' = \frac{\partial(Z', X')}{\partial(\xi', \eta')}, \quad C' = \frac{\partial(X', Y')}{\partial(\xi', \eta')}.$$

Da, wie bereits erwähnt, die partiellen Ableitungen $\frac{\partial U_t}{\partial \xi}$, $\frac{\partial U_t}{\partial \eta}$, als Funktionen von t aufgefaßt, sich ebenfalls im Bereiche $|t| \leq t^*$ regulär verhalten, so ist

$$0) \quad \frac{\partial}{\partial \xi}(U_1 - U) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} U^{(n)}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta}(U_1 - U) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \eta} U^{(n)}.$$

Aus (22) und (37) folgt insbesondere

$$1) \quad U^{(1)} = \xi \frac{\partial}{\partial \nu} W(\xi, \eta, 0) + \int_S \frac{1}{\varrho} \zeta' d\sigma'.$$

Aus (35) folgt für $n = 2$

$$2) \quad \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2} = \int_S \sum (a' \zeta' - a \zeta) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{A'_t}{\varrho_t} \right) d\xi' d\eta'.$$

§ 3.

Fortsetzung.

Die Funktion $\frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2}$ hat stetige partielle Ableitungen erster Ordnung bezug auf ξ und η . Es gilt beispielsweise

$$) \quad \frac{\partial^2 U_t}{\partial \xi \partial t^2} = \int_S \sum (a' \zeta' - a \zeta) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t} \left(\frac{A'_t}{\varrho_t} \right) d\xi' d\eta' - \int_S \sum \frac{\partial}{\partial \xi} (a \zeta) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{A'_t}{\varrho_t} \right) d\xi' d\eta'.$$

Der etwas langwierige, wenn auch an sich keine Schwierigkeiten darstellende Beweis ist in der ersten Abhandlung (Kap. V § 1) im einzelnen durchgeführt³⁶⁾.

In (42) ist die zu integrierende Funktion beschränkt und, außer höchstens wenn $\xi = \xi'$, $\eta = \eta'$ ist, stetig. In (43) werden die beiden Funktionen unter dem Integralzeichen für $\xi = \xi'$, $\eta = \eta'$ wie $\frac{1}{\varrho}$ unendlich.

Für alle t in dem Intervalle $0 \leq t \leq t^*$ ist darum, wie man ohne Schwierigkeiten sieht (vgl. Abh. I, S. 246),

$$4) \quad \left| \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2} \right|, \quad \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2} \right|, \quad \left| \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2} \right| < \gamma \varepsilon^2 \quad (\gamma \text{ konstant}).$$

³⁶⁾ Vgl. Abh. I, S. 279—280.

Wegen

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} U_1 - U_0 - \left[\frac{\partial U_t}{\partial t} \right]_{t=0} &= \int_0^1 dt \int_0^t \frac{\partial^2 U_{t_*}}{\partial t_*^2} dt_*, \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ U_1 - U_0 - \left[\frac{\partial U_t}{\partial t} \right]_{t=0} \right\} &= \int_0^1 dt \int_0^t \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial^2 U_{t_*}}{\partial t_*^2} dt_* \end{aligned} \right.$$

ist

$$(46) \quad |U_1 - U_0 - U^{(1)}| = |U^{(2)} + U^{(3)} + \dots| = |\Psi| < \gamma \varepsilon^2, \quad \left| \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right| < \gamma \varepsilon^2,$$

und analog

$$(47) \quad \left| \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right| < \gamma \varepsilon^2.$$

Sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2}$, $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \partial \eta}$, $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2}$ vorhanden und stetig, so hat auch die Funktion $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ partielle Ableitungen zweiter Ordnung in bezug auf ξ und η . Diese partiellen Ableitungen sind in der ersten Abhandlung bei den Konvergenzbetrachtungen herangezogen worden. Man kann sie indessen, wie ich seitdem eingesehen habe, entbehren, wodurch das Ganze an Einfachheit gewinnt³⁷⁾.

Aus (24) ergibt sich, wenn man $t = 1$ setzt,

$$(48) \quad X_1 = X + a\zeta, \quad Y_1 = Y + b\zeta, \quad Z_1 = Z + c\zeta.$$

Demnach ist

$$(49) \quad \begin{aligned} X_1^2 + Y_1^2 &= X^2 + Y^2 + 2(aX + bY)\zeta + (a^2 + b^2)\zeta^2 \\ &= R^2 + 2R\tau\zeta + (a^2 + b^2)\zeta^2. \end{aligned}$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$(50) \quad \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{2\pi f} = \lambda$$

und erhalten

$$(51) \quad \begin{aligned} \frac{\omega_1^2}{2\pi f}(X_1^2 + Y_1^2) - \frac{\omega^2}{2\pi f}(X^2 + Y^2) &= \lambda(X_1^2 + Y_1^2) \\ &+ \frac{\omega^2}{2\pi f}(X_1^2 + Y_1^2 - X^2 - Y^2) = \lambda R^2 + \frac{\omega^2}{\pi f} R\tau\zeta + \frac{\omega^2}{2\pi f}(a^2 + b^2)\zeta^2 \\ &+ 2\lambda R\tau\zeta + (a^2 + b^2)\lambda\zeta^2. \end{aligned}$$

Aus (5), (37), (41), (10) und (51) ergibt sich nunmehr die Beziehung

³⁷⁾ Insbesondere wird jetzt der Hilfssatz in § 2 des fünften Kapitels überflüssig

$$2) \quad \psi' \zeta + \int_S \frac{1}{\varrho} \zeta' d\sigma' = s - R^2 \lambda - \frac{\omega^2}{2\pi f} (a^2 + b^2) \zeta^2 - 2 R \tau \lambda \zeta \\ - (a^2 + b^2) \lambda \zeta^2 - U^{(2)} - U^{(3)} - \dots$$

Dies ist eine nichtlineare Integro-Differentialgleichung zur Bestimmung von ζ .

Zweites Kapitel.

Untersuchung einer Integralgleichung.

§ 1.

Triviale Nulllösungen.

Betrachten wir die homogene lineare Integralgleichung

$$1) \quad \psi' \zeta + \int_S \frac{1}{\varrho} \zeta' d\sigma' = 0.$$

Es geht, da $\psi' < 0$ ist, durch die Substitution $Z = \zeta \sqrt{-\psi'}$ in eine Integralgleichung mit symmetrischem Kern über. Sie hat, wie in der ersten Abhandlung bewiesen worden ist³⁸⁾, wenn T kein Rotationskörper um die z -Achse ist, mindestens zwei linear unabhängige Nulllösungen u_1, u_2 . Ist S eine Rotationsfläche um die z -Achse, so ist die Anzahl der stets vorhandenen Nulllösungen gleich 1. Es gilt $u_1 = \text{const. } c$, $u_2 = \text{const. } R \cos p$, unter p den Winkel verstanden, der von (r) und dem bei einer Drehung von T um die z -Achse von dem Punkte (ξ, η) beschriebenen Kreisbogen eingeschlossen ist. Wir denken uns u_1 und u_2 den Beziehungen

$$2) \quad \int_S \psi u_1^2 d\sigma = -1, \quad \int_S \psi u_2^2 d\sigma = -1$$

gemäß normiert. Ist T ein Rotationskörper um die z -Achse, so ist $R \cos p \equiv 0$, und es bleibt nur noch die Nulllösung u_1 zurück. Wir setzen in diesem Falle $u_2 \equiv 0$.

Wie bereits erwähnt, wird stets angenommen, daß T eine Symmetrieebene durch die Rotationsachse hat. Es seien σ^* und σ'^* bzw. σ_* und σ_* Punkte, die zu σ und σ' in bezug auf die Ebene $y = 0$ bzw. $z = 0$ symmetrisch liegen. Es gilt

$$3) \quad \begin{aligned} u_1(\sigma^*) &= u_1(\sigma), & u_1(\sigma_*) &= -u_1(\sigma), \\ u_2(\sigma^*) &= -u_2(\sigma), & u_2(\sigma_*) &= u_2(\sigma). \end{aligned}$$

³⁸⁾ Vgl. Abh. I, S. 249–250.

Die Integralgleichung (1) möge außer u_1 und u_2 noch weitere Nulllösungen haben und es sei

$$(4) \quad u_1, u_2, u_3, \dots, u_m$$

ein vollständiges System linear unabhängiger Lösungen von (1). Es sei vorübergehend

$$(5) \quad v_3(\sigma) = u_3(\sigma^*), \dots, v_m(\sigma) = u_m(\sigma^*)$$

gesetzt. Die Funktionen $v_3(\sigma), \dots, v_m(\sigma)$ sind Lösungen von (1). Denn es ist z. B.

$$(6) \quad \psi(\sigma^*) u_3(\sigma^*) + \int_S \frac{1}{\varrho(\sigma^*, \sigma')} u_3(\sigma') d\sigma' = 0,$$

oder, was dasselbe ist,

$$(7) \quad \psi(\sigma^*) u_3(\sigma^*) + \int_S \frac{1}{\varrho(\sigma^*, \sigma^{**})} u_3(\sigma^{**}) d\sigma^{**} = 0,$$

mithin wegen

$$(8) \quad \varrho(\sigma, \sigma') = \varrho(\sigma^*, \sigma^{**}) = \varrho(\sigma_*, \sigma'_*), \quad \psi(\sigma) = \psi(\sigma^*), \quad d\sigma' = d\sigma^{**},$$

$$(9) \quad \psi(\sigma) v_3(\sigma) + \int_S \frac{1}{\varrho(\sigma, \sigma')} v_3(\sigma') d\sigma' = 0.$$

Auch die Funktionen

$$(10) \quad w_l = u_l + v_l \quad \text{und} \quad \bar{w}_l = u_l - v_l$$

sind Nulllösungen von (1), sofern sie nicht identisch verschwinden. Wegen

$$(11) \quad u_l = \frac{w_l + \bar{w}_l}{2}$$

läßt sich jede Nulllösung der Integralgleichung (1) linear durch die Lösungen $w_l, \bar{w}_l$ ($l=1, \dots, m$) ausdrücken. Also läßt sich aus $w_l, \bar{w}_l$ ein vollständiges System linear unabhängiger Lösungen, etwa w_{1l} ($l=1, \dots, m$) aussondern. Entweder ist

$$(12) \quad w_{1l}(\sigma^*) = w_{1l}(\sigma) \quad \text{oder} \quad w_{1l}(\sigma^*) = -w_{1l}(\sigma).$$

Da $u_2(\sigma^*) = -u_2(\sigma)$ ist, so gibt es, wenn S keine Rotationsfläche um die z -Achse ist, mindestens eine Nulllösung der zweiten Art. Da $w_1 = 2u_1$, $\bar{w}_2 = 2u_2$ ist, so kann man sich gewiß so einrichten, daß das System w_{1l} die Nulllösungen u_1 und u_2 enthält. Von diesem System ausgehend gewinnt man, wenn man den vorhin durchgeführten Prozeß in bezug auf die Ebene $z=0$ wiederholt, ein neues vollständiges System linear unabhängiger Nulllösungen, dessen einzelne Individuen auch bei dem Übergang von σ zu σ_* entweder ungeändert bleiben oder das Vorzeichen wechseln. Die Gesamtheit der Nulllösungen zerfällt damit in vier verschiedene Kategorien. Man kann sich augenscheinlich so einrichten, daß

die Funktionen u_1 und u_2 auch dem neuen System angehören und die einzelnen Nulllösungen, die wir der Einfachheit halber wieder mit $u_1, u_2, \dots, u_m$ bezeichnen, die Orthogonalitäts- und Normierungsbeziehungen

$$(13) \quad \int_S \psi u_j u_l d\sigma = 0 \quad (j \neq l), \quad \int_S \psi u_j^2 d\sigma = -1$$

erfüllen. Es genügt hierzu, die Lösungen jeder einzelnen Kategorie für sich in bekannter Weise zu orthogonalisieren und zu normieren.

Wir nehmen schließlich an, daß T , wie bei den Flüssigkeitsellipsoiden, auch die Ebene $x=0$ zu einer Symmetrieebene hat. Es läßt sich dann ganz wie vorhin zeigen, daß man die Nulllösungen nunmehr in acht verschiedene Kategorien zerfallen kann. Auch bei dem Übergang von σ zu einem in bezug auf die Ebene $x=0$ symmetrischen Punkte ändern sich die Nulllösungen nicht oder wechseln das Vorzeichen.

§ 2.

Das vollständige normierte Orthogonalsystem.

Es sei ν_n ein Eigenwert der Integralgleichung

$$(14) \quad \psi \zeta + \nu_n \int_S \frac{\zeta'}{\varrho} d\sigma' = 0.$$

Die soeben durchgeführten Überlegungen lassen sich ohne jede Änderung auf die Integralgleichung (14) übertragen. Faßt man sämtliche Eigenwerte ν_n und alle nach angegebener Vorschrift gebildeten Eigenfunktionen zusammen, so erhält man ein vollständiges Orthogonalsystem von Funktionen, die bei dem Übergang von σ zu σ^* bzw. σ_* entweder ungeändert bleiben oder das Vorzeichen wechseln.

Es seien ν_n ($n=1, 2, \dots$) die Eigenwerte, nach ihrer Vielfachheit gezählt und dem absoluten Betrage nach einfach geordnet:

$$(15) \quad |\nu_1| \leq |\nu_2| \leq |\nu_3| \leq \dots,$$

und es sei $u^{(n)}$ die zu ν_n gehörige Eigenfunktion. Aus der Definitionsgleichung

$$(16) \quad \psi u^{(n)} + \nu_n \int_S \frac{u^{(n)'}}{\varrho} d\sigma' = 0$$

folgt, daß $u^{(n)}$ stetige Ableitungen aller Ordnungen hat. In der Tat genügt nach bekannten Sätzen das Potential einer einfachen Belegung

$$(17) \quad P_1(\sigma) = \int_S \frac{1}{\varrho} u^{(n)'} d\sigma', \quad |u^{(n)}| < E$$

einer Beziehung von der Form

$$(18) \quad |P_1(\bar{\sigma}) - P_1(\sigma)| < g^*(\mu_*) E \bar{d}''^{\mu} \quad (\bar{d}^2 = (\bar{\xi} - \xi)^2 + (\bar{\eta} - \eta)^2,$$

μ_* ein beliebiger echter Bruch, $g^*(\mu_*)$ ein nur von μ_* abhängiger Wert).

Die Funktion

$$(19) \quad u^{(n)} = - \frac{r_n}{\psi} \int_S \frac{1}{\varrho} u^{(n)'} d\sigma'$$

erfüllt, da ψ stetige Ableitungen aller Ordnungen hat, eine ganz analoge Ungleichheit. Da die Dichte der Belegung von P_1 demnach eine zu (18) analoge Ungleichheit erfüllt, so hat $u^{(n)}$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, die gewissen zu (18) analogen Ungleichheiten genügen. Man kann in ähnlicher Weise weiter fortschreiten und gelangt so zu dem zuletzt angegebenen Satz.

Es sei $k(\xi, \eta)$ irgendeine auf S erklärte Funktion, die nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig ist. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial k}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial k}{\partial \eta}$ mögen Ungleichheiten von der Form

$$(20) \quad \left| \frac{\partial k}{\partial \xi}(\xi + h, \eta + h_1) - \frac{\partial k}{\partial \xi}(\xi, \eta) \right| < \text{const.} (|h| + |h_1|)^{\mu}, \quad (0 < \mu < 1)$$

genügen. *Es gilt die Entwicklung*

$$(21) \quad \frac{1}{\psi} \int_S \frac{k' d\sigma'}{\varrho} = \sum \frac{1}{r_j} u^{(j)} \int_S \psi' k' u^{(j)'} d\sigma'.$$

Setzt man $\sqrt{-\psi} u^{(n)} = \chi_n$, so genügt χ_n der Integralgleichung mit symmetrischem Kern

$$(22) \quad \chi_n - r_n \int_S \frac{\chi_n'}{\sqrt{\psi \psi' \varrho}} d\sigma' = 0$$

sowie der durch Iteration gewonnenen Integralgleichung

$$(23) \quad \chi_n - r_n^2 \int_S K^{(2)}(\sigma, \sigma'') \chi_n'' d\sigma'' = 0, \quad K^{(2)}(\sigma, \sigma'') = - \int_S \frac{d\sigma'}{\psi' \sqrt{\psi \psi''} \varrho(\sigma, \sigma') \varrho(\sigma', \sigma'')}.$$

Betrachten wir jetzt diejenige in T reguläre Potentialfunktion, die auf S den Wert $\psi k(\sigma)$ annimmt. Nach bekannten Sätzen hat diese Potentialfunktion stetige Normalableitung. Sie kann also als Potential einer einfachen Belegung mit stetiger Dichte dargestellt werden. Wir können darum setzen

$$(24) \quad \psi' k(\sigma') = - \int_S \frac{\bar{k}(\sigma'') d\sigma''}{\varrho(\sigma', \sigma'') \sqrt{-\psi''}}.$$

Nach bekannten Sätzen gilt die Entwicklung

²⁰⁾ Hier wie im folgenden ist $\sqrt{-\psi'} > 0$.

$$25) \quad P(\sigma) = \int_S K^{(2)}(\sigma, \sigma'') \tilde{k}(\sigma'') d\sigma'' = \sum \chi_n \int_S P \chi_n d\sigma.$$

Nun ist

$$26) \quad P(\sigma) = - \int_S \int_S \frac{\tilde{k}(\sigma'') d\sigma' d\sigma''}{\psi' \sqrt{\psi} \psi'' \varrho(\sigma, \sigma') \varrho(\sigma', \sigma'')} = \int_S \frac{k(\sigma') d\sigma'}{\varrho(\sigma, \sigma') \sqrt{-\psi}},$$

$$27) \quad \int_S P \chi_n d\sigma = \int_S \int_S \frac{k(\sigma') \chi_n(\sigma) d\sigma d\sigma'}{\varrho(\sigma, \sigma') \sqrt{-\psi}} \\ = \frac{1}{r_n} \int_S \sqrt{-\psi'} k(\sigma') \chi'_n d\sigma' = - \frac{1}{r_n} \int_S \psi' k' u^{(n)'} d\sigma'.$$

Wir finden somit

$$28) \quad \frac{1}{\sqrt{-\psi}} \int_S \frac{k(\sigma') d\sigma'}{\varrho(\sigma, \sigma')} = - \sum \frac{\sqrt{-\psi'} u^{(n)}}{r_n} \int_S \psi' k' u^{(n)'} d\sigma'$$

oder, wie behauptet,

$$29) \quad \frac{1}{\psi'} \int_S \frac{k' d\sigma'}{\varrho(\sigma, \sigma')} = \sum \frac{u^{(n)}}{r_n} \int_S \psi' k' u^{(n)'} d\sigma'.$$

§ 3.

Fortsetzung.

Das vollständige normierte Orthogonalsystem $u^{(n)}$ ist abgeschlossen. Es ist zunächst nicht schwer zu zeigen, daß es keine auf S stetige Funktion Ξ gibt, so daß für alle n

$$30) \quad \int_S \psi \Xi u^{(n)} d\sigma = 0$$

wäre.

Sei

$$31) \quad \psi \tilde{\Xi} = \int_S \frac{\Xi' d\sigma'}{\varrho}.$$

Dann würden wegen (19) die weiteren Beziehungen

$$32) \quad \int_S \psi \tilde{\Xi} u^{(n)} d\sigma = \int_S \int_S \frac{\Xi' u^{(n)} d\sigma d\sigma'}{\varrho} = - \frac{1}{r_n} \int_S \psi' \Xi' u^{(n)'} d\sigma' = 0$$

gelten. Die Funktion $\tilde{\Xi}$ darf, wie man leicht sieht, in (29) für k eingesetzt werden⁴⁰⁾. Mit Rücksicht auf (32) erhalten wir aus dieser Entwicklung

$$33) \quad \int_S \frac{\tilde{\Xi}'}{\varrho} d\sigma' = 0,$$

und somit nach bekannten Sätzen

⁴⁰⁾ Für die Gültigkeit der Entwicklung (29) ist das Bestehen der Beziehung (24) entscheidend. Die Funktion $\tilde{\Xi}$ erfüllt die zu (24) analoge Gleichung (31).

$$(34) \quad \tilde{\Xi} = \int_S \frac{\Xi' d\sigma'}{\varrho} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \int_S \frac{\Xi' d\sigma'}{\varrho} = 0$$

und schließlich $\tilde{\Xi} = 0$, w. z. b. w.⁴¹⁾.

Sind $\chi(\sigma)$ und $\chi_1(\sigma)$ zwei auf S erklärte analytische Funktionen, so gilt nach (21) gewiß

$$\int_S \frac{\chi_1' d\sigma'}{\varrho} = \sum \frac{1}{r_n} \psi u^{(n)} \int_S \psi \chi_1 u^{(n)} d\sigma,$$

darum

$$(35) \quad \int_S \int_S \frac{1}{\varrho} \chi \chi_1' d\sigma d\sigma' = \sum \frac{1}{r_n} \int_S \psi \chi u^{(n)} d\sigma \int_S \psi \chi_1 u^{(n)} d\sigma'.$$

Diese Formel gilt, wie sich zeigen läßt (vgl. die Fußnote ⁴¹⁾), für schlechthin stetige $\chi(\sigma)$ und $\chi_1(\sigma)$.

Sei $\vartheta(\sigma)$ eine beliebige analytische Funktion auf S . Wie wir schon wissen, gibt es eine stetige Funktion $\chi_1(\sigma)$, so daß

$$(36) \quad \vartheta(\sigma) = \int_S \frac{\chi_1(\sigma')}{\varrho} d\sigma'$$

gilt. Hieraus und aus (35) folgt

$$(37) \quad \int_S \vartheta \chi d\sigma = \sum \int_S \psi \chi u^{(n)} d\sigma \int_S \psi \vartheta u^{(n)} d\sigma.$$

Diese Formel gilt, wie sich zeigen wird, für beliebige quadratisch integrierbare ϑ und χ (vgl. die Fußnote ⁴¹⁾). Das System $u^{(n)}$ ist abgeschlossen.

Der Ausdruck auf der linken Seite der Formel (35) ist für $\chi = \chi_1$ nicht negativ und verschwindet nur, wenn $\chi(\sigma) \equiv 0$ ist.

Es sei

$$(38) \quad \mathfrak{U}(x, y, z) = \int_S \frac{\chi' d\sigma'}{\varrho(x, y, z; \sigma')}.$$

Wir finden (vgl. die Fußnote ⁴¹⁾)

$$(39) \quad \int_S \int_S \frac{1}{\varrho} \chi \chi' d\sigma d\sigma' = -\frac{1}{4\pi} \int_S \mathfrak{U}(\sigma) \left[\frac{\partial}{\partial \nu} \mathfrak{U}(\sigma^+) - \frac{\partial}{\partial \nu} \mathfrak{U}(\sigma^-) \right] d\sigma$$

⁴¹⁾ Das Potential der einfachen Belegung $\tilde{\mathfrak{U}} = \int_S \frac{\tilde{\Xi}' d\sigma'}{\varrho}$, unter $\varrho(x, y, z; \sigma)$ die Entfernung der Punkte (x, y, z) und σ verstanden, ist auf S , darum in $T + S$ gleich Null. Da $\tilde{\mathfrak{U}}$ im Unendlichen verschwindet, so ist es auch in dem Außenraum T_a von T , demnach überall gleich Null. Sei $\frac{\partial}{\partial \nu} \tilde{\mathfrak{U}}(\sigma^+)$ die Ableitung in der Richtung der Außennormale (ν) auf der Außenseite, $\frac{\partial}{\partial \nu} \tilde{\mathfrak{U}}(\sigma^-)$ die Ableitung in derselben Richtung auf der Innenseite von S . Wegen

$$\tilde{\Xi} = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} \tilde{\mathfrak{U}}(\sigma^+) - \frac{\partial}{\partial \nu} \tilde{\mathfrak{U}}(\sigma^-) \right]$$

ist demnach $\tilde{\Xi} = 0$

oder nach einer teilweisen Integration

$$(40) \quad \int_S \int_S \frac{1}{\varrho} \chi \chi' d\sigma d\sigma' = \frac{1}{4\pi} \int_{T+T_a} \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz.$$

Der Ausdruck rechterhand ist nicht negativ und verschwindet nur, wenn $\mathfrak{U} = \text{const.}$ ist, somit, da $\mathfrak{U}$ im Unendlichen verschwindet, wenn $\mathfrak{U} \equiv 0$ ist. Aus (38) folgt, daß dann $\chi(\sigma) \equiv 0$ ausfällt. Unsere Behauptung ist hiermit bewiesen⁴²⁾.

Aus der Tatsache, daß der Ausdruck (40) nicht negativ ist, folgt, wie man leicht findet, daß die Eigenwerte ν_n sämtlich positiv sind.

Auf dieselben Eigenwerte und Eigenfunktionen wird man bei der Auflösung der folgenden Randwertaufgabe geführt:

Es ist dasjenige Potential einer auf S ausgebreiteten einfachen Flächenbelegung

$$(41) \quad \mathfrak{U}(x, y, z) = \int_S \frac{\chi' d\sigma'}{\varrho(x, y, z; \sigma')}$$

zu bestimmen, das auf S der Bedingung

$$(42) \quad \frac{1}{4\pi} \psi \left[\frac{\partial}{\partial \nu} \mathfrak{U}(\sigma^+) - \frac{\partial}{\partial \nu} \mathfrak{U}(\sigma^-) \right] = \nu_n \mathfrak{U}(\sigma)$$

genügt⁴³⁾.

§ 4.

Besonderer Fall eines Rotationskörpers.

Wir kehren jetzt zur Betrachtung der Integralgleichung (1) zurück. Liegt, wie wir annehmen wollen, der Verzweigungsfall vor, so hat (1) neben den trivialen Lösungen u_1 und u_2 noch weitere Nulllösungen $u_3, \dots, u_m$. In der ersten Abhandlung habe ich die Vermutung ausgesprochen, daß das vollständige System linear unabhängiger Nulllösungen $u_1, u_2, u_3, \dots, u_m$ stets so gewählt werden kann, daß $u_3, \dots, u_m$ in bezug auf die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ symmetrisch sind⁴⁴⁾. Diese Vermutung ist, wie man gleich sehen wird, nicht zutreffend.

⁴²⁾ Der vorstehende Beweis des Satzes, daß der Kern $\frac{1}{\varrho}$ positiv definit und abgeschlossen ist, beruht auf einer in der mathematischen Physik üblichen Umformung des Ausdruckes für die Energie eines elektrostatischen Feldes. Einen ganz anders gearteten direkten Beweis für dieselbe Tatsache hat Herr I. Schur gegeben. Vgl. loc. cit.⁴⁰⁾.

⁴³⁾ Vgl. É. Le Roy, „Sur l'intégration des équations de la chaleur“, Annales de l'École Normale, (3) 15 (1898), S. 9–178.

⁴⁴⁾ Vgl. Abh. I, S. 268.

Es sei T ein *Rotationskörper*. Wir bestimmen die Lage eines Punktes auf S vorübergehend durch seine längs eines Meridians gemessene Entfernung von dem Pole, $\mathfrak{s}$, und durch den Azimutwinkel $\mathfrak{b}$ des betrachteten Meridians. *Wie wir jetzt zeigen wollen, sind die Eigenfunktionen der Integralgleichung*

$$(43) \quad \psi \mathfrak{s} + \nu_l \int_S \frac{1}{\varrho} \zeta' d\sigma' = 0$$

entweder von der Form $\mathfrak{F}(\mathfrak{s})$, oder sie treten paarweise auf und lassen sich durch die Formeln

$$(44) \quad \mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \cos k \mathfrak{b},$$

$$(45) \quad \mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \sin k \mathfrak{b},$$

unter k eine ganze positive Zahl verstanden, ausdrücken.

In dem ersteren Falle haben die Eigenfunktionen Rotationssymmetrie um die z -Achse, in dem zweiten Falle haben sie k durch die Umdrehungsachse hindurchgehende Symmetrieebenen. Überdies geht die Eigenfunktion (45) in (44) durch eine Drehung um den Winkel $\frac{\pi}{2k}$ über.

Es sei $u(\mathfrak{s}, \mathfrak{b})$ irgendeine Eigenfunktion der Integralgleichung (43). Für ψ, σ, ϱ schreiben wir jetzt der Übersichtlichkeit halber $\psi(\mathfrak{s}, \mathfrak{b})$, $\sigma(\mathfrak{s}, \mathfrak{b})$, $\varrho(\mathfrak{s}, \mathfrak{b}; \mathfrak{s}', \mathfrak{b}')$. Für (43) tritt jetzt die ausführlichere Formel

$$(46) \quad \psi(\mathfrak{s}, \mathfrak{b}) u(\mathfrak{s}, \mathfrak{b}) + \nu_l \int_S \frac{u(\mathfrak{s}', \mathfrak{b}') d\sigma(\mathfrak{s}', \mathfrak{b}')}{\varrho(\mathfrak{s}, \mathfrak{b}; \mathfrak{s}', \mathfrak{b}')} = 0$$

ein. Sei α eine beliebige Konstante. Aus (46) folgt

$$(47) \quad \psi(\mathfrak{s}, \mathfrak{b} + \alpha) u(\mathfrak{s}, \mathfrak{b} + \alpha) + \nu_l \int_S \frac{u(\mathfrak{s}', \mathfrak{b}' + \alpha) d\sigma(\mathfrak{s}', \mathfrak{b}' + \alpha)}{\varrho(\mathfrak{s}, \mathfrak{b} + \alpha; \mathfrak{s}', \mathfrak{b}' + \alpha)} = 0.$$

Die Schwerkraft $\psi(\mathfrak{s}, \mathfrak{b})$ ist nun von dem Azimutwinkel unabhängig. Es gilt demnach

$$(48) \quad \psi(\mathfrak{s}, \mathfrak{b} + \alpha) = \psi(\mathfrak{s}, \mathfrak{b}).$$

Ferner ist, da S eine Rotationsfläche um die z -Achse ist,

$$(49) \quad \varrho(\mathfrak{s}, \mathfrak{b} + \alpha; \mathfrak{s}', \mathfrak{b}' + \alpha) = \varrho(\mathfrak{s}, \mathfrak{b}; \mathfrak{s}', \mathfrak{b}')$$

und

$$(50) \quad d\sigma(\mathfrak{s}', \mathfrak{b}' + \alpha) = d\sigma(\mathfrak{s}', \mathfrak{b}').$$

Für (47) können wir demnach schreiben

$$(51) \quad \psi(\mathfrak{s}, \mathfrak{b}) u(\mathfrak{s}, \mathfrak{b} + \alpha) + \nu_l \int_S \frac{u(\mathfrak{s}', \mathfrak{b}' + \alpha) d\sigma(\mathfrak{s}', \mathfrak{b}')}{\varrho(\mathfrak{s}, \mathfrak{b}; \mathfrak{s}', \mathfrak{b}')} = 0.$$

Die Funktion $u(\xi, \eta + \alpha)$ ist also für alle α eine Eigenfunktion von (46). Demnach ist auch die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial \eta} u(\xi, \eta)$ eine Eigenfunktion, außer wenn sie identisch verschwindet. In diesem Falle ist $u(\xi, \eta) \equiv \mathfrak{F}(\xi)$. Auch die partiellen Ableitungen höherer Ordnung $\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} u(\xi, \eta)$, $\frac{\partial^3}{\partial \eta^3} u(\xi, \eta)$, ... sind, wenn sie nicht identisch verschwinden, Eigenfunktionen.

Es sei jetzt

$$(52) \quad u^{(1)}, \dots, u^{(n)}$$

ein vollständiges System linear unabhängiger Eigenfunktionen von (46), und es möge $\frac{\partial}{\partial \eta} u^{(1)}$ nicht identisch verschwinden.

In der Reihe der Funktionen

$$(53) \quad u^{(1)}, \frac{\partial}{\partial \eta} u^{(1)}, \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} u^{(1)}, \dots,$$

die ebenfalls der Integralgleichung (46) genügen, kann es höchstens n linear unabhängige geben, $u^{(1)}$ genügt demnach, als Funktion von η aufgefaßt, einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten von höchstens n -ter Ordnung. Es sei

$$(54) \quad \frac{\partial^m u^{(1)}}{\partial \eta^m} + d_1 \frac{\partial^{m-1} u^{(1)}}{\partial \eta^{m-1}} + \dots + d_m u^{(1)} = 0. \quad (m \leq n)$$

Da $u^{(1)}$, $\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \eta}$, ..., $\frac{\partial^{m-1} u^{(1)}}{\partial \eta^{m-1}}$ linear unabhängige Eigenfunktionen von (46) sind und zugleich m linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichungen (54) darstellen, so ist jede Lösung dieser Differentialgleichung eine Eigenfunktion.

Da $u^{(1)}$, als Funktion von η aufgefaßt, eine periodische Funktion mit der Periode 2π ist, so muß die charakteristische Gleichung

$$(55) \quad \lambda^m + d_1 \lambda^{m-1} + \dots + d_m \lambda = 0$$

entweder lauter verschiedene rein imaginäre Wurzeln haben, oder es kann eine Wurzel verschwinden, während die anderen voneinander verschieden und rein imaginär sind.

Einer etwaigen verschwindenden Wurzel würde eine Eigenfunktion von der Form $u^{(1)} = \mathfrak{F}(\xi)$ entsprechen; diesen Fall haben wir vorhin ausgeschlossen. Einem Paar konjugiert komplexer Wurzeln $\pm ki$ entsprechen die reellen Eigenfunktionen $\mathfrak{F}_1(\xi) \cos k\eta$, $\mathfrak{F}_1(\xi) \sin k\eta$. Da diese die Periode 2π haben sollen, so muß k eine ganze Zahl sein.

Ist $u^{(1)} = \mathfrak{F}_1(\xi) \cos k\eta$, so ist $\mathfrak{F}_1(\xi) \sin k\eta = \frac{1}{k} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \eta}$. Diese beiden

Funktionen bilden demnach eine Gruppe zusammengehöriger linear unabhängiger Eigenfunktionen. Wie man sieht, ist also $m = 2$.

Ist $m < n$, so gibt es in (52) mindestens eine Eigenfunktion, etwa $u^{(2)}$ die unter den soeben gefundenen Funktionen nicht enthalten ist. Vorhin läßt sich jetzt zeigen, daß $u^{(2)}$ entweder die Form $\mathfrak{F}(\beta)$ hat oder einer Gruppe von Eigenfunktionen angehört, die einer zu (54) analogen linearen Differentialgleichung genügen und von der Form $\mathfrak{F}_1(\beta) \cos k\beta$ oder $\mathfrak{F}_1(\beta) \sin k\beta$ sind.

Es sei insbesondere $\nu_1 = 1$. Wie wir wissen, gibt es stets eine Eigenfunktion der Integralgleichung (43) von der Form $\mathfrak{F}(\beta)$; es ist dies die früher mit u_1 bezeichnete triviale Nulllösung.

Es möge jetzt T wieder irgendeine Gleichgewichtsfigur bezeichnen. Es ist leicht zu zeigen, daß es in dem vollständigen orthogonalen und normierten System $u^{(n)}$ mindestens eine in bezug auf die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ symmetrische Eigenfunktion gibt. Wäre es nämlich anders, so würde das Integral $\int_S \sqrt{-\psi} u^{(n)} d\sigma$ für alle n verschwinden. Da das System $u^{(n)}$ wäre nicht abgeschlossen, — es könnte durch die Funktionen

$\frac{1}{D_0 \sqrt{-\psi}}$ ($D_0 = \text{Flächeninhalt von } S$) erweitert werden.

In gleicher Weise wird gezeigt, daß es unter den in bezug auf die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ symmetrischen Eigenfunktionen mindestens eine, $\hat{u}$, gibt, so daß $\int_S \hat{u} d\sigma \neq 0$ ist.

Hat T auch die Ebene $x = 0$ zu einer Symmetrieebene, so gibt es mindestens eine Eigenfunktion $\hat{u}$, die in bezug auf alle drei Koordinatenebenen symmetrisch ist und der Bedingung $\int_S \hat{u} d\sigma \neq 0$ genügt. Ist T ein Rotationskörper, so gibt es mindestens eine Eigenfunktion von der Form

$$\mathfrak{F}(\beta) \quad \left(\int_S \mathfrak{F}(\beta) d\sigma \neq 0 \right).$$

Drittes Kapitel.

Existenzsätze.

§ 1.

Der reguläre Fall. Verfahren der sukzessiven Approximationen.

Ist T_1 eine Gleichgewichtsfigur der Flüssigkeit, so ist jeder Körper, den man erhält, wenn man T_1 parallel zu sich selbst in der Richtung der z -Achse um eine beliebige Strecke verschiebt, oder um die z -Achse um einen beliebigen Winkel dreht, ebenfalls eine Gleichgewichtsfigur. Um die Lage von T festzulegen, bedarf es darum weiterer Festsetzungen. Wir nehmen diese in der Form

$$(1) \quad \int_S \psi u_1 \zeta d\sigma = 0,$$

$$(2) \quad \int_S \psi u_2 \zeta d\sigma = 0$$

an. Ist T ein Rotationskörper, so ist $u_2 \equiv 0$, und (2) ist identisch erfüllt. Daß für hinreichend kleine, etwa den Beziehungen

$$(3) \quad |\zeta|, \left| \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right|, \left| \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right| < \varepsilon \leq \varepsilon_0$$

genügende Werte von $|\zeta|$, $\left| \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right|$, $\left| \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right|$ den Forderungen (1) und (2) stets genügt werden kann, ist nicht schwer zu beweisen. Es genügt hierzu T_1 eine geeignete kleine Schraubung um die z -Achse zu erteilen (vgl. die Abb. I, S. 251, wo allerdings die Beziehungen (1) und (2) einzeln betrachtet werden).

Wir setzen

$$(4) \quad \frac{1}{\psi \varrho} = \psi' (u_1 u_1' + u_2 u_2') + \frac{1}{\psi'} N.$$

Es gilt, wie man unmittelbar sieht,

$$(5) \quad \varrho(\sigma^*, \sigma'^*) = \varrho(\sigma, \sigma'), \quad u_1(\sigma^*) = u_1(\sigma)$$

$$(6) \quad u_2(\sigma^*) = -u_2(\sigma), \quad \psi(\sigma^*) = \psi(\sigma)$$

und darum auch

$$(7) \quad N(\sigma^*, \sigma'^*) = N(\sigma, \sigma')$$

und analog

$$(8) \quad N(\sigma_*, \sigma'_*) = N(\sigma, \sigma').$$

Aus (52) I; (1), (2) und (4) folgt für beliebige Gleichgewichtsfiguren T

$$(9) \quad \psi \zeta + \int_S N \zeta' d\sigma' = s - R^2 \lambda - \frac{\omega^2}{2\pi f} (a^2 + b^2) \zeta^2 - 2R\tau \lambda \zeta - (a^2 + b^2) \lambda \zeta^2 - U^{(2)} - U^{(3)} - \dots = II\{\lambda, s, \zeta\}.$$

In diesem Kapitel werden den Parametern λ und s , oder, ausführlicher geschrieben, $\lambda, s_1, \dots, s_q$ allgemein *komplexe* Werte erteilt.

Die weitere Behandlung der Funktionalgleichung (9) fällt verschieden aus, je nachdem u_1 und u_2 die einzigen Nulllösungen der Integralgleichung (1) II sind oder nicht. Es möge zunächst der erstere Fall vorliegen.

Nach bekannten Sätzen hat die Integralgleichung

$$\psi \zeta + \int_S N \zeta' d\sigma' = 0$$

keine Nulllösungen.

Die Integro-Differentialgleichung (9) wird durch sukzessive Approximationen gelöst. Wir setzen

$$(10) \quad \begin{cases} \psi \zeta_1 + \int_S N \zeta_1' d\sigma' = s - R^2 \lambda, \\ \psi \zeta_2 + \int_S N \zeta_2' d\sigma' = II\{\lambda, s, \zeta_1\}, \\ \psi \zeta_3 + \int_S N \zeta_3' d\sigma' = II\{\lambda, s, \zeta_2\}, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Sind $|\lambda|$ und $|s|$ hinreichend klein, sagen wir

$$(11) \quad |s|, \quad |\lambda| \leq \delta^{(0)},$$

so läßt sich für $|\zeta_n|$, $\left|\frac{\partial \zeta_n}{\partial \xi}\right|$, $\left|\frac{\partial \zeta_n}{\partial \eta}\right|$, wie wir jetzt zeigen wollen, eine von n , s und σ' unabhängige obere Schranke angeben⁴⁵⁾.

Es sei l eine positive ganze Zahl ≥ 1 und es möge

$$(12) \quad |\zeta_l|, \quad \left|\frac{\partial \zeta_l}{\partial \xi}\right|, \quad \left|\frac{\partial \zeta_l}{\partial \eta}\right| \leq \varepsilon^* \leq \varepsilon$$

sein. Ist $|s|, |\lambda| \leq \delta$, so ist mit Rücksicht auf (9), (46) I und (47)

$$(13) \quad \begin{cases} |II\{\lambda, s, \zeta_l\}|, \quad \left|\frac{\partial}{\partial \xi} II\{\lambda, s, \zeta_l\}\right|, \quad \left|\frac{\partial}{\partial \eta} II\{\lambda, s, \zeta_l\}\right| \\ < \beta_1 \delta + \beta_2 \delta \varepsilon^* + \beta_3 \varepsilon^{*2} + \beta_4 \delta \varepsilon^{*2}, \end{cases}$$

unter β_1 bis β_4 , wie später unter $\beta_3, \dots$ positive (von l , δ und ε^* unabhängige) Konstante verstanden.

Wird $|\delta| \leq 1$ angenommen, so kann man (13) durch die einfacheren Ungleichheiten

$$(14) \quad \begin{cases} |II\{\lambda, s, \zeta_l\}|, \quad \left|\frac{\partial}{\partial \xi} II\{\lambda, s, \zeta_l\}\right|, \\ \left|\frac{\partial}{\partial \eta} II\{\lambda, s, \zeta_l\}\right| < \beta_5 (\delta + \delta \varepsilon^* + \varepsilon^{*2}) \end{cases}$$

ersetzen.

Es sei H der zu dem Kerne $\frac{1}{\psi} N$ gehörige lösende Kern. Aus (10) folgt in naheliegender Bezeichnungsweise

$$(15) \quad \begin{cases} \zeta_1 = \frac{s}{\psi} - \frac{1}{\psi} R^2 \lambda - \int_S H \left[\frac{s}{\psi'} - \frac{1}{\psi'} R'^2 \lambda \right] d\sigma', \\ \dots \dots \dots \\ \zeta_{l+1} = \frac{1}{\psi} II\{\lambda, s, \zeta_l\} - \int_S \frac{1}{\psi'} H II'\{\lambda, s, \zeta_l\} d\sigma' \end{cases} \quad (l \geq 1)$$

Es sei $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ ein beliebiger Punkt in der Umgebung des Punktes (ξ, η) . Es sei χ eine auf S erklärte stetige reelle oder komplexe Funktion, und es möge

⁴⁵⁾ In der ersten Abhandlung wurden bei den sukzessiven Approximationen auch die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung eingeführt.

$$(16) \quad |\chi| < E \quad (E \text{ konstant})$$

sein. Betrachten wir das Potential einer einfachen Belegung

$$(17) \quad P = \int_S \frac{1}{\varrho} \chi' d\sigma'.$$

Nach bekannten Sätzen ist (vgl. S. 149–150)

$$(18) \quad \begin{cases} |P| < g_1 E, & |P - \bar{P}| < g^*(\mu_*) E \bar{d}''^*, \\ \bar{d}^2 = (\bar{\xi} - \xi)^2 + (\bar{\eta} - \eta)^2, & \bar{P} = P(\bar{\xi}, \bar{\eta}), \end{cases}$$

unter g_1 eine positive Konstante, unter μ_* irgendeinen positiven echten Bruch, unter $g^*(\mu_*)$ eine nur von μ_* abhängige positive Zahl verstanden. Genügt χ außer (16) einer Beziehung von der Form

$$(19) \quad |\chi - \bar{\chi}| < E \bar{d}'', \quad \bar{\chi} = \chi(\bar{\xi}, \bar{\eta}), \quad 0 < \mu < 1,$$

so hat P stetige partielle Ableitungen erster Ordnung und es gilt

$$(20) \quad \begin{cases} |P|, \quad \left| \frac{\partial P}{\partial \xi} \right|, \quad \left| \frac{\partial P}{\partial \eta} \right| < g_2(\mu) E, \\ \left| \frac{\partial P}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{P}}{\partial \xi} \right|, \quad \left| \frac{\partial P}{\partial \eta} - \frac{\partial \bar{P}}{\partial \eta} \right| < g_2(\mu) E \bar{d}''. \end{cases}$$

Wir setzen

$$(21) \quad Q = \int_S H \chi' d\sigma'.$$

Wie wir jetzt zeigen wollen, hat unter den zuletzt getroffenen Annahmen auch Q stetige partielle Ableitungen erster Ordnung und es gilt

$$(22) \quad \begin{cases} |Q|, \quad \left| \frac{\partial Q}{\partial \xi} \right|, \quad \left| \frac{\partial Q}{\partial \eta} \right| < g_3(\mu) E, \\ \left| \frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \xi} \right|, \quad \left| \frac{\partial Q}{\partial \eta} - \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \eta} \right| < g_3(\mu) E \bar{d}''. \end{cases}$$

In der Tat ist bekanntlich

$$(23) \quad H(\sigma, \sigma') + \int_S \frac{1}{\psi(\sigma)} N(\sigma, \sigma_1) H(\sigma_1, \sigma') d\sigma_1 = \frac{1}{\psi(\sigma)} N(\sigma, \sigma'),$$

demnach, ausführlicher geschrieben,

$$(24) \quad Q(\sigma) = \int_S \frac{1}{\psi(\sigma)} N(\sigma, \sigma') \chi_0(\sigma') d\sigma',$$

$$(25) \quad \chi_0(\sigma) = \chi(\sigma) - \int_S H(\sigma, \sigma') \chi(\sigma') d\sigma'.$$

Für (25) kann man auch setzen

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} \chi_0(\sigma) &= \chi(\sigma) - Q(\sigma) = \chi(\sigma) - \int_S \frac{1}{\psi(\sigma)} N(\sigma, \sigma') \chi_0(\sigma') d\sigma' \\ &= \chi(\sigma) - \int_S \frac{1}{\psi'(\sigma)} \chi'_0 d\sigma' + \int_S \psi' (u_1 u'_1 + u_2 u'_2) \chi'_0 d\sigma'. \end{aligned} \right.$$

Aus (25) folgt zunächst, daß die Funktion $\chi_0(\sigma)$ stetig ist und einer Ungleichheit von der Form

$$(27) \quad |\chi_0| < \beta_0 E$$

genügt. Nunmehr ergibt sich aus (26) (vgl. (17), (18)), daß

$$(28) \quad |\bar{\chi}_0 - \chi_0| < \beta_7(\mu) E \bar{d}''$$

gilt. Aus (24) und (28) folgen die zu beweisenden Beziehungen (22).

Aus (15) und (14) schließen wir, da ψ gewiß stetige Ableitungen erster Ordnung hat, daß

$$(29) \quad |\zeta_{l+1}|, \quad \left| \frac{\partial \zeta_{l+1}}{\partial \xi} \right|, \quad \left| \frac{\partial \zeta_{l+1}}{\partial \eta} \right| < \beta_8 (\delta + \delta \varepsilon^* + \varepsilon^{*2})$$

ist. Wir nehmen ε^* gleich der kleineren der beiden Zahlen

$$(30) \quad \varepsilon \text{ und } \frac{1}{\beta_n}$$

an. Offenbar ist dann $1 - \beta_8 \varepsilon^* > 0$. Es sei jetzt ferner

$$(31) \quad \delta < \varepsilon^* \frac{1 - \beta_8 \varepsilon^*}{\beta_n (1 + \varepsilon^*)}.$$

Aus (29) ergibt sich dann augenscheinlich

$$(32) \quad |\zeta_{l+1}|, \quad \left| \frac{\partial \zeta_{l+1}}{\partial \xi} \right|, \quad \left| \frac{\partial \zeta_{l+1}}{\partial \eta} \right| < \varepsilon^*.$$

Diese Ungleichheiten sind also eine Folge der Ungleichheiten (12).

Wegen (15) ist, wenn $|\lambda|, |s|$ hinreichend klein gewählt sind, etwa

$$(33) \quad |\lambda|, |s| < \delta^{(0)} \leq \delta, \quad (\delta < 1, \delta < \varepsilon^* \frac{1 - \beta_n \varepsilon^*}{\beta_n (1 + \varepsilon^*)})$$

gewiß

$$(34) \quad |\zeta_1|, \quad \left| \frac{\partial \zeta_1}{\partial \xi} \right|, \quad \left| \frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta} \right| < \varepsilon^*.$$

Nimmt man demnach $|s|$ und $|\lambda|$ den Beziehungen (11) genügend an, so gelten (32), wie behauptet, für alle positiven l .

§ 2.

Fortsetzung.

Die Funktionen der Folge ζ_n ($n=1, 2, \dots$) sind für alle komplexen $|\lambda|$ und $|s|$ in dem Gebiete $|\lambda|, |s| < \delta^{(0)}$ analytische und reguläre Funktionen von λ .

Dies sieht man wohl am einfachsten wie folgt ein. Betrachten wir den Ausdruck

$$(35) \quad J = \int_S \frac{1}{\xi} \sum A'_i (a' \zeta' - a \zeta) d\xi' d\eta' = \lim_{\bar{D}=0} \int_{S-\bar{S}}$$

und nehmen wir an, daß ζ eine in gewissen Kreisgebieten um den Koordinatenursprung erklärte analytische und reguläre Funktion der komplexen Parameter $v_1, \dots, v_m$ sei. Das gleiche gilt dann, wie unter Zuhilfenahme des Cauchyschen Integrals unmittelbar gezeigt werden kann, auch für $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$. Das Integral $\int_{S-\bar{S}}$ ist in t und $v_1, \dots, v_m$ analytisch und regulär, und, da der Grenzübergang gleichmäßig ist, so gilt das gleiche auch für J .

Auch die Differentialquotienten $\frac{\partial^m U_t}{\partial t^m} = \frac{\partial^{m-1} J}{\partial t^{m-1}}$ sind in $v_1, \dots, v_m$ und t analytisch und regulär. In der Entwicklung

$$(36) \quad U_1 - U = U^{(1)} + U^{(2)} + U^{(3)} + \dots$$

sind mithin alle Funktionen $U^{(n)}$ ($n=1, 2, \dots$) in bezug auf $v_1, \dots, v_m$ analytisch und regulär. Die unendliche Reihe (36) konvergiert unbedingt und gleichmäßig. Demnach ist auch der Ausdruck $U^{(2)} + U^{(3)} + \dots$ in bezug auf $v_1, \dots, v_m$ analytisch und regulär.

Aus (15) folgt ohne weiteres, daß ζ_1 in bezug auf s und λ analytisch ist. Nach dem soeben bewiesenen gilt das gleiche für $\Pi\{\lambda, s, \zeta_1\}$; für $v_1, \dots, v_m$ sind diesmal $\lambda, s_1, \dots, s_q$ einzuführen. Auch der Ausdruck

$$(37) \quad \int_S \frac{1}{\psi'} H \Pi' \{\lambda, s, \zeta_1\} d\sigma' = \lim_{\bar{D}=0} \int_{S-\bar{S}} \frac{1}{\psi'} H \Pi' \{\lambda, s, \zeta_1\} d\sigma' \quad ^{46)},$$

demnach auch ζ_2 ist in bezug auf λ und s analytisch. Also sind alle ζ_n ($n=1, 2, \dots$) in den Kreisflächen $|s|, |\lambda| < \delta^{(0)}$ in bezug auf λ und s analytisch und regulär.

Es gilt nun

$$(38) \quad \psi \zeta_n + \int_S N \zeta'_n d\sigma' = \Pi\{\lambda, s, \zeta_{n-1}\} \\ = s - R^2 \lambda - \frac{\omega^2}{2\pi f} (a^2 + b^2) \zeta_{n-1}^2 - 2R\tau \lambda \zeta_{n-1} - (a^2 + b^2) \lambda \zeta_{n-1}^2 - \Psi(\zeta_{n-1}),$$

⁴⁶⁾ Mit $\Pi'\{\lambda, s, \zeta_1\}$ wird der Wert bezeichnet, den man erhält, wenn man in $\Pi'\{\lambda, s, \zeta_1\}$ für σ überall σ' setzt.

$$\Psi(\zeta) = U^{(2)} + U^{(3)} + \dots,$$

demnach, $\zeta_{n+1} - \zeta_n = \xi_n$ gesetzt,

$$(39) \quad \psi \xi_n + \int_S N \xi'_n d\sigma' = -\frac{\omega^3}{2\pi f} (a^2 + b^2) (\zeta_{n-1} + \zeta_n) \xi_{n-1} - 2R\tau\lambda \xi_{n-1} \\ - (a^2 + b^2) \lambda (\zeta_{n-1} + \zeta_n) \xi_{n-1} - [\Psi(\zeta_n) - \Psi(\zeta_{n-1})] \\ = \Theta_{n-1} - [\Psi(\zeta_n) - \Psi(\zeta_{n-1})].$$

Es sei Ω_n der größte der drei Werte

$$(40) \quad \text{Max } |\xi_n|, \quad \text{Max } \left| \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \xi} \right|, \quad \text{Max } \left| \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \eta} \right|.$$

Wegen (32), (33), (34) ist, wie man leicht findet,

$$(41) \quad |\Theta_{n-1}|, \quad \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \Theta_{n-1} \right|, \quad \left| \frac{\partial}{\partial \eta} \Theta_{n-1} \right| < (\beta_9 \varepsilon^* + \beta_{10} \delta^{(0)} + \beta_{11} \delta^{(0)} \varepsilon^*) \Omega_{n-1}.$$

Aus dem in § 3 des fünften Kapitels der Abh. I (S. 282–284) abgeleiteter Hilfssatzes folgt wegen (32), (33), (34)

$$(42) \quad |\Psi(\zeta_n) - \Psi(\zeta_{n-1})|, \quad \left| \frac{\partial}{\partial \xi} [\Psi(\zeta_n) - \Psi(\zeta_{n-1})] \right|, \\ \left| \frac{\partial}{\partial \eta} [\Psi(\zeta_n) - \Psi(\zeta_{n-1})] \right| < \beta_{12} \varepsilon^* \Omega_{n-1}.$$

Aus (39) folgt den Betrachtungen des § 1 dieses Kapitels gemäß

$$(43) \quad \Omega_n < (\beta_{13} \varepsilon^* + \beta_{14} \delta^{(0)} + \beta_{15} \delta^{(0)} \varepsilon^*) \Omega_{n-1}.$$

Man kann nun ε^* und $\delta^{(0)}$ so klein wählen, daß $\beta_{13} \varepsilon^* + \beta_{14} \delta^{(0)} + \beta_{15} \delta^{(0)} \varepsilon^* < 1$ wird. Für alle hinreichend kleinen $|s|$, $|\lambda|$, etwa $|s|, |\lambda| \leq \delta^{(1)} \leq \delta^{(0)}$ konvergieren darum die unendlichen Reihen

$$(44) \quad \zeta_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n, \quad \frac{\partial \zeta_1}{\partial \xi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \tilde{\xi}_n}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \tilde{\xi}_n}{\partial \eta}$$

wie geometrische Reihen. Die Folge ζ_n ($n = 1, 2, \dots$) konvergiert gleichmäßig. Die Funktion $\zeta = \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n$ hat stetige partielle Ableitungen erster

Ordnung, darum den Betrachtungen des vierten Kapitels der ersten Abhandlung gemäß auch stetige Ableitungen aller Ordnungen.

Da die unendlichen Reihen (44) gleichmäßig konvergieren, so ist ζ für $|s|, |\lambda| \leq \delta^{(1)}$ in bezug auf λ und s analytisch und regulär.

Es sei

$$(45) \quad \zeta = \sum a_{r_0 r_1 \dots r_q} \lambda^{r_0} s_1^{r_1} \dots s_q^{r_q}.$$

Aus der Cauchyschen Integraldarstellung folgt nun, daß die Funktionen $a_{r_0 r_1 \dots r_q}$ in bezug auf ξ und η stetig sind und stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben. Die unendliche Reihe (45) kann glied-

weise differenziert werden. Es seien in der Tat $\Gamma_\lambda, \Gamma_{s_1}, \dots, \Gamma_{s_q}$ Kreise vom Halbmesser $\delta^{(1)}$ um den Koordinatenursprung in den Ebenen der komplexen Variablen $\lambda, s_1, \dots, s_q$. Für alle $|\lambda|, |s_1|, \dots, |s_q| < \delta^{(1)}$ ist, wenn wir einmal ausführlicher $\zeta(\xi, \eta; \lambda, s_1, \dots, s_q)$ für ζ schreiben,

$$\zeta(\xi, \eta; \lambda, s_1, \dots, s_q) = \frac{1}{(2\pi i)^{q+1}} \int_{\Gamma_\lambda} \dots \int_{\Gamma_{s_q}} \frac{\zeta(\xi, \eta; \tilde{\lambda}, \tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_q)}{(\tilde{\lambda} - \lambda) \dots (\tilde{s}_q - s_q)} d\tilde{\lambda} d\tilde{s}_1 \dots d\tilde{s}_q.$$

Hieraus folgt z. B.

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \zeta(\xi, \eta; \lambda, s_1, \dots, s_q) = \frac{1}{(2\pi i)^{q+1}} \int_{\Gamma_\lambda} \dots \int_{\Gamma_{s_q}} \frac{\frac{\partial}{\partial \xi} \zeta(\xi, \eta; \tilde{\lambda}, \tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_q)}{(\tilde{\lambda} - \lambda) \dots (\tilde{s}_q - s_q)} d\tilde{\lambda} d\tilde{s}_1 \dots d\tilde{s}_q.$$

Also ist $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$ und ebenso $\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$ eine analytische und reguläre Funktion von $\lambda, s_1, \dots, s_q$. Hieraus folgt fast unmittelbar, daß die Reihe (45) gliedweise differenzierbar ist.

Führt man in (9) für ζ den Ausdruck (45) ein, so gewinnt man Beziehungen zur Bestimmung der Funktionen $a_{\nu_0 \nu_1 \dots \nu_q}$. Gesetzt, die Funktionen $a_{\nu_0 \nu_1 \dots \nu_q}$ ($\nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_q \leq n$) seien bereits ermittelt. Man erhält dann zur Bestimmung der Koeffizienten $a_{\nu_0 \nu_1 \dots \nu_q}$ ($\nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_q = n+1$) Integralgleichungen von der Form

$$(46) \quad \psi a_{\nu_0 \nu_1 \dots \nu_q} + \int_S N a'_{\nu_0 \nu_1 \dots \nu_q} d\sigma' = A_{\nu_0 \nu_1 \dots \nu_q}.$$

Der Ausdruck $A_{\nu_0 \nu_1 \dots \nu_q}$ ist der Koeffizient von $\lambda^{\nu_0} s_1^{\nu_1} \dots s_q^{\nu_q}$ in dem Polynom, das man erhält, wenn man in

$$(47) \quad s - R^2 \lambda - \frac{\omega^2}{2\pi f} (a^2 + b^2) \zeta^2 - 2R\tau \lambda \zeta - (a^2 + b^2) \lambda \zeta^2 \\ - U^{(2)} - U^{(3)} - \dots - U^{(n)}$$

für ζ das Polynom

$$(48) \quad \sum a_{\nu_0 \nu_1 \dots \nu_q} \lambda^{\nu_0} s_1^{\nu_1} \dots s_q^{\nu_q} \quad (\nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_q \leq n)$$

einführt. Die Gleichung (46) bestimmt $a_{\nu_0 \nu_1 \dots \nu_q}$ vollständig.

Die vorhin gefundene Lösung der Integro-Differentialgleichung (9) ist die einzige Lösung, der eine Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeit in der Umgebung des Körpers T entsprechen kann (vgl. die Abh. I S. 277–278). Gibt es in der Umgebung von T weitere Figuren des relativen Gleichgewichtes, so sind diese durch die Gleichung (45) gegeben. Damit die Fläche ξ, η, ζ wirklich eine Gleichgewichtsfigur begrenze, müssen indessen für alle den Beziehungen

$$(49) \quad |\lambda|, |s| \leq \delta^{(1)}$$

genügenden Werte $\lambda, s_1, \dots, s_q$ die Gleichungen (1) und (2) erfüllt sein.

Wie wir jetzt zeigen wollen, sind diese Bedingungen : der Tat erfüllt und zwar deshalb, weil wir vorausgesetzt haben, daß die Ebene $y = 0$ eine Symmetrieebene des Körpers T ist.

Wir setzen für (9) nach (37) I

$$(50) \quad \psi(\sigma)\zeta(\sigma) + \int_S N(\sigma, \sigma')\zeta(\sigma')d\sigma' \\ = s - P\{\lambda, \sigma, \zeta(\sigma)\} - U_1(\sigma) + U(\sigma) + U^{(1)}(\sigma),$$

$$(51) \quad P\{\lambda, \sigma, \zeta(\sigma)\} = R^2(\sigma)\lambda + \frac{\omega^2}{2\pi f}(a^2(\sigma) + b^2(\sigma))\zeta^2(\sigma) \\ + 2R(\sigma)\tau(\sigma)\lambda\zeta(\sigma) + (a^2(\sigma) + b^2(\sigma))\lambda\zeta^3(\sigma).$$

Hieraus folgt

$$(52) \quad \psi(\sigma^*)\zeta(\sigma^*) + \int_S N(\sigma^*, \sigma')\zeta(\sigma')d\sigma' = s - P\{\lambda, \sigma^*, \zeta(\sigma^*)\} \\ - U_1(\sigma^*) + U(\sigma^*) + U^{(1)}(\sigma^*),$$

oder, was dasselbe ist,

$$(53) \quad \psi(\sigma^*)\zeta(\sigma^*) + \int_S N(\sigma^*, \sigma^{*'})\zeta(\sigma^{*'})d\sigma^{*'} = s - P\{\lambda, \sigma^*, \zeta(\sigma^*)\} \\ - U_1(\sigma^*) + U(\sigma^*) + U^{(1)}(\sigma^*).$$

Es sei $\mathfrak{T}_1$ der Körper, der entsteht, wenn man T_1 an der Ebene $y = 0$ spiegelt. Dem Punkte $\sigma = (\xi, \eta)$ auf S wird hierdurch die „Koordinate“ $\mathfrak{z}(\sigma) = \zeta(\sigma^*)$ zugeordnet. Das Potential von $\mathfrak{T}_1$ im Punkte ξ, η , $\mathfrak{z}(\sigma)$ sei mit $\mathfrak{U}_1(\sigma)$ bezeichnet.

Offenbar ist

$$U_1(\sigma^*) = \mathfrak{U}_1(\sigma), \quad P\{\lambda, \sigma^*, \zeta(\sigma^*)\} = P\{\lambda, \sigma, \mathfrak{z}(\sigma)\}, \\ U(\sigma^*) = U(\sigma), \quad \psi(\sigma^*) = \psi(\sigma), \quad N(\sigma^*, \sigma^{*'}) = N(\sigma, \sigma'), \quad d\sigma^{*'} = d\sigma'.$$

Nach (41) I ist schließlich, wie man leicht findet,

$$U^{(1)}(\sigma^*) = \mathfrak{U}^{(1)}(\sigma).$$

Aus (53) folgt darum

$$(54) \quad \psi(\sigma)\mathfrak{z}(\sigma) + \int_S N(\sigma, \sigma')\mathfrak{z}(\sigma')d\sigma' = s - P\{\lambda, \sigma, \mathfrak{z}(\sigma)\} \\ - \mathfrak{U}_1(\sigma) + U(\sigma) - \mathfrak{U}^{(1)}(\sigma).$$

Die Funktion $\mathfrak{z}(\sigma) = \zeta(\sigma^*)$ ist demnach eine in bezug auf λ und s analytische und reguläre Lösung der Integro-Differentialgleichung (9). Nach dem soeben bewiesenen kann diese von $\zeta(\sigma)$ nicht verschieden sein. Es gilt mithin

$$(55) \quad \zeta(\sigma) = \zeta(\sigma^*).$$

In ähnlicher Weise überzeugt man sich, daß auch

$$(56) \quad \zeta(\sigma) = \zeta(\sigma_*)$$

ist. Aus (55) und (56) folgt wegen $u_1(\sigma_*) = -u_1(\sigma)$, $u_2(\sigma^*) = -u_2(\sigma)$

$$(57) \quad \int_S \psi \zeta u_1 d\sigma = 0, \quad \int_S \psi \zeta u_2 d\sigma = 0.$$

Diese Beziehungen gestatten von der Gleichung (9) zu der Gleichung (52) I überzugehen. Die Fläche $\zeta, \eta, \zeta(\xi, \eta)$ begrenzt eine Gleichgewichtsfigur der Flüssigkeit. Die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ sind, wegen (55) und (56), Symmetrieebenen des Körpers.

War die Ausgangsfigur von einer Rotationsfläche um die z -Achse begrenzt, so gilt von den neuen Figuren des Gleichgewichts das gleiche. Denn jetzt ist jede durch die Rotationsachse hindurchgehende Ebene eine Symmetrieebene der Figur.

§ 3.

Diskussion.

Wie vorhin ausgeführt, läßt sich ζ in eine nach Potenzen von $s_1, \dots, s_q, \lambda$ fortschreitende Reihe entwickeln. Es ist

$$(58) \quad \zeta = \frac{s}{\psi} - \int_S s \frac{H}{\psi'} d\sigma' - \lambda \left(\frac{R^2}{\psi'} - \int_S H \frac{R'^2}{\psi'} d\sigma' \right) + \dots$$

Wir nehmen an, daß T aus zwei Einzelmassen besteht, $q = 2$. Das Volumen dieser Massen sei entsprechend gleich v_1 und v_2 . Wir fragen, ob es in der Nachbarschaft von T weitere Gleichgewichtsfiguren gibt, die folgende Eigenschaften haben. Sie gehören zu dem Werte ω der Winkelgeschwindigkeit und bestehen aus zwei Einzelmassen vom Volumen $v_1 + \delta v_1$ und $v_2 + \delta v_2$, unter $|\delta v_1|, |\delta v_2|$ hinreichend kleine Größen verstanden.

Offenbar ist jetzt $\lambda = 0$. Werden die beiden Randkomponenten von T entsprechend mit S^1 und S^2 bezeichnet, so ist in leicht ersichtlicher Bezeichnungsweise

$$(59) \quad \int_0^1 dt \int_{S_i^1} \zeta \cos \varphi_i d\sigma_i = \delta v_1$$

und

$$(60) \quad \int_0^1 dt \int_{S_i^2} \zeta \cos \varphi_i d\sigma_i = \delta v_2.$$

Wir setzen

$$(61) \quad \cos \varphi_i d\sigma_i = (aA_i + bB_i + cC_i) d\xi d\eta = \sum a \frac{\partial(Y + bt\xi, Z + ct\xi)}{\partial(\xi, \eta)} d\xi d\eta \\ = (1 + E_1 t + E_2 t^2) d\sigma.$$

Die Funktionen E_1 und E_2 sind, wie man sich leicht überzeugt, in bezug auf ζ , $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$ vom ersten bzw. zweiten Grade. In E_2 gehen übrigens $(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi})^2$, $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$, $(\frac{\partial \zeta}{\partial \eta})^2$ nicht ein.

Aus (59) und (61) folgt

$$(62) \quad \int_{S^1} \zeta d\sigma + \frac{1}{2} \int_{S^1} E_1 \zeta d\sigma + \frac{1}{8} \int_{S^1} E_2 \zeta d\sigma = \delta v_1$$

und analog

$$(63) \quad \int_{S^2} \zeta d\sigma + \frac{1}{2} \int_{S^2} E_1 \zeta d\sigma + \frac{1}{8} \int_{S^2} E_2 \zeta d\sigma = \delta v_2,$$

demnach wegen (58)

$$(64) \quad \begin{aligned} s_1 \left(\int_{S^1} \frac{1}{\psi} d\sigma - \int \int_{S^1 S^1} \frac{H}{\psi'} d\sigma d\sigma' \right) - s_2 \int \int_{S^1 S^2} \frac{H}{\psi'} d\sigma d\sigma' + \dots = \delta v_1, \\ -s_1 \int \int_{S^2 S^1} \frac{H}{\psi'} d\sigma d\sigma' + s_2 \left(\int_{S^2} \frac{1}{\psi} d\sigma - \int \int_{S^2 S^2} \frac{H}{\psi'} d\sigma d\sigma' \right) + \dots = \delta v_2. \end{aligned}$$

Ist die Determinante Δ der Glieder erster Ordnung in bezug auf s_1 und s_2 von Null verschieden, so gehört zu jedem Paar dem absoluten Betrage nach hinreichend kleiner Werte δv_1 und δv_2 eine Gleichgewichtsfigur in der Nachbarschaft von T . Wie man leicht sieht, ist⁴⁷⁾

$$(65) \quad \Delta = \left(\int_{S^1} \frac{1}{\psi} d\sigma - \int \int_{S^1 S^1} \frac{H}{\psi'} d\sigma d\sigma' \right) \left(\int_{S^2} \frac{1}{\psi} d\sigma - \int \int_{S^2 S^2} \frac{H}{\psi'} d\sigma d\sigma' \right) - \int \int_{S^1 S^2} \frac{H}{\psi'} d\sigma d\sigma' \int \int_{S^2 S^1} \frac{H}{\psi'} d\sigma d\sigma'$$

Besteht die Gleichgewichtsfigur aus zwei in bezug auf die Rotationsachse symmetrisch gelegenen Körpern, so daß S^2 aus S^1 durch eine Drehung um 180° hervorgeht, so ergibt in dem ersten Summanden die Integration über S^1 denselben Wert wie die Integration über S^2 , ferner sind die beiden Faktoren des zweiten Summanden einander gleich. Hier ist darum

$$(66) \quad \Delta = \left(\int_{S^1} \frac{1}{\psi} d\sigma - \int \int_{S^1 S^1} \frac{H}{\psi'} d\sigma d\sigma' \right)^2 - \left(\int \int_{S^1 S^2} \frac{H}{\psi'} d\sigma d\sigma' \right)^2$$

⁴⁷⁾ Der Ausdruck $\frac{H}{\psi'}$ ist in bezug auf σ und σ' symmetrisch.

Bei einer Ähnlichkeitstransformation mit dem Verhältnis $1:1+\alpha$ ist, wie man leicht sieht, $s_1 = s_2 = s = c_1 \alpha + \dots$ ($c_1 > 0$ konstant). Ferner ist $\int_{T,-T} dv = c_2 \alpha + \dots$ ($c_2 > 0$ konstant). Aus (64) folgt jetzt

$$(67) \quad \int_{T,-T} dv = s \left(\int_S \frac{1}{\psi'} d\sigma - \int_S \int_S \frac{H}{\psi'} d\sigma d\sigma' \right) + \dots$$

Es ist darum jedenfalls

$$(68) \quad \int_S \frac{1}{\psi'} d\sigma - \int_S \int_S \frac{H}{\psi'} d\sigma d\sigma' > 0.$$

Ist

$$(69) \quad \Delta = 0,$$

so entsprechen einem System der Werte $\delta v_1, \delta v_2$, allgemein zu reden, zwei oder mehr Gleichgewichtsfiguren. Einzelne von diesen oder auch alle könnten freilich imaginär sein.

§ 4.

Der Verzweigungsfall.

Die Integralgleichung (1) II möge jetzt Nullösungen haben, die von den Funktionen u_1 und u_2 linear unabhängig sind. Es sei $u_1, u_2, \dots, u_m$ ein vollständiges System linear unabhängiger Nullösungen, das wie im Kapitel II § 1 näher auseinandergesetzt wurde beschaffen ist. Wir nehmen zunächst an, daß $u_3, \dots, u_m$ in bezug auf die Ebenen $y=0$ und $z=0$ symmetrisch sind. Die Funktion

$$(70) \quad \frac{1}{\psi'} N - \sum_{l=3}^m \psi' u_l u_l' = \frac{1}{\psi' \varrho} - \sum_{l=1}^m \psi' u_l u_l' = \frac{1}{\psi'} N_1$$

genügt offenbar den Beziehungen

$$(71) \quad N_1(\sigma^*, \sigma'^*) = N_1(\sigma, \sigma'), \quad N_1(\sigma_*, \sigma'_*) = N_1(\sigma, \sigma').$$

Die Integralgleichung

$$(72) \quad \psi \zeta + \int_S N_1 \zeta' d\sigma' = 0$$

hat keine Nullösungen.

Wir schreiben jetzt die Integro-Differentialgleichung (9) in der Form

$$(73) \quad \psi \zeta + \int_S N_1 \zeta' d\sigma' = \Pi \{ \lambda, s, \zeta \} + \sum_{l=3}^m \psi r_l u_l,$$

$$(74) \quad r_l = - \int_S \psi' u_l' \zeta' d\sigma' \quad (l=3, \dots, m)$$

und fassen r_l ($l = 3, \dots, m$) zunächst als unbestimmte Parameter auf⁴⁸⁾. Durch eine fast wortgetreue Wiederholung der Betrachtungen der §§ 1 und 2 überzeugt man sich, daß die Beziehung (73) für alle dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen Werte von $|\lambda|$, $|s_l|$ ($l = 1, \dots, q$) und $|r_l|$ ($l = 3, \dots, m$), etwa

$$(75) \quad |\lambda| \leq \delta^{(2)}, \quad |s_l| \leq \delta^{(2)} \quad (l = 1, \dots, q), \quad |r_l| \leq \delta^{(2)} \quad (l = 3, \dots, m)$$

eine und nur eine in bezug auf diese $(m + q - 1)$ Parameter analytische und reguläre Lösung ζ hat. Sie kann durch sukzessive Approximationen gewonnen werden. Diese konvergieren gleichmäßig.

Es sei H_1 der zu $\frac{1}{\psi} N_1$ gehörige lösende Kern. Die Glieder ersten Grades der Entwicklung von ζ lassen sich unmittelbar bestimmen. Man findet wegen

$$(76) \quad \zeta = \frac{s}{\psi} + \sum_{j=3}^m r_j u_j - \frac{1}{\psi} R^2 \lambda + \int_S H_1 \left\{ -\frac{s}{\psi'} + \frac{1}{\psi} R'^2 \lambda \right\} d\sigma' + \\ + \sum b_{\nu_0 \nu_1 \dots \mu_m} \lambda^{\nu_0} s_1^{\nu_1} \dots s_q^{\nu_q} r_3^{\mu_3} \dots r_m^{\mu_m} \quad (\nu_0 + \nu_1 + \dots + \mu_m > 1).$$

Durch Überlegungen, die den in § 2 durchgeführten Betrachtungen ganz analog sind, läßt sich zeigen, daß die Funktion ζ in bezug auf die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ symmetrisch ist. Demnach ist für alle den Beziehungen (75) genügenden Werte von λ ; $s_1, \dots, s_q$; $r_3, \dots, r_m$

$$(77) \quad \int_S \psi \zeta u_1 d\sigma = 0, \quad \int_S \psi \zeta u_2 d\sigma = 0.$$

Führt man den Ausdruck (76) für ζ in die Gleichungen (74) ein, so erhält man $(m - 2)$ Gleichungen zur Bestimmung der Größen $r_3, \dots, r_m$. Es ist nun

$$\int_S \psi u_i^2 d\sigma = -1$$

und nach bekannten Sätzen der Theorie linearer Integralgleichungen

$$(78) \quad \int_S H_1(\sigma, \sigma') \psi(\sigma) u_l(\sigma) d\sigma = 0 \quad (l = 3, \dots, m).$$

Die vorgenannten Gleichungen sind demnach, wie man leicht sieht, von der Form

⁴⁸⁾ Einer ähnlichen Zerlegung des Kernes in Summanden bedient sich Herr E. Schmidt in seinen Untersuchungen über die Verzweigung der Lösungen nichtlinearer Integralgleichungen. Vgl. E. Schmidt, „Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. III. Teil. Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichungen und die Verzweigung ihrer Lösungen“, Math. Annalen 65 (1908), S. 370–399.

$$\lambda \int_S R^3 u_l d\sigma - \sum_{j=1}^q s_j \int_{S^{(j)}} u_l d\sigma + \mathfrak{P}_l(\lambda; s_1, \dots, s_q; r_3, \dots, r_m) = 0,$$

$$(80) \quad \mathfrak{P}_l = \sum B_{\nu_0 \nu_1 \dots \nu_q \mu_3 \dots \mu_m} \lambda^{\nu_0} s_1^{\nu_1} \dots s_q^{\nu_q} r_3^{\mu_3} \dots r_m^{\mu_m}$$

$$(B_{\nu_0 \dots \mu_m} \text{ konstant, } \nu_0 + \nu_1 + \dots + \mu_m > 1)$$

$$(l = 3, \dots, m).$$

Es sei

$$(81) \quad r_j = r_j(\lambda, s_1, \dots, s_q) \quad (j = 1, \dots, q)$$

ein für $\lambda = s_1 = \dots = s_q = 0$ verschwindendes System von Lösungen dieser Gleichungen. Für hinreichend kleine Werte von $|\lambda|, |s_1|, \dots, |s_q|$ sind demnach die Bedingungen (75) gewiß erfüllt. Die Funktion (76) genügt der Integro-Differentialgleichung (73) und wegen (74) und (77) auch der Gleichung (52) I. Die Fläche $\xi, \eta, \zeta(\xi, \eta)$ begrenzt eine Figur des relativen Gleichgewichtes.

Die Untersuchung der Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der gegebenen Figur ist damit auf die Diskussion des Systems der Gleichungen (80) zurückgeführt.

Es möge jetzt im Gegensatz zu den bisherigen Annahmen unter den Nulllösungen $u_3, \dots, u_m$ welche geben, die bei dem Übergang von σ zu σ^* oder σ_* das Vorzeichen wechseln. Diese Lösungen mögen $u_{m_1+1}, \dots, u_m$ heißen; die übrigen Lösungen, nämlich $u_3, \dots, u_{m_1}$, sind demnach in bezug auf die Ebenen $y=0$ und $z=0$ symmetrisch. Gibt es in der Nachbarschaft der Figur T neue Gleichgewichtsfiguren, so sind diese, wie wir wissen, sicher in bezug auf die Ebene $z=0$ symmetrisch. Genügen die Nulllösungen $u_{m_1+1}, \dots, u_{m_2} (m_2 \leq m)$ den Beziehungen $u_{m_1+1}(\sigma_*) = -u_{m_1+1}(\sigma), \dots, u_{m_2}(\sigma_*) = -u_{m_2}(\sigma)$, so ist jedenfalls $r_{m_1+1} = \dots = r_{m_2} = 0$. Wir nehmen an, daß die gesuchten Gleichgewichtsfiguren auch eine durch die Rotationsachse hindurchgehende Symmetrieebene haben. Legt man diese in die Ebene $y=0$ hinein, so findet man auch $r_{m_2+1} = \dots = r_m = 0$. Man gelangt darum von (73) zu einer hierzu ganz analogen Gleichung, wobei für N_1 jetzt der Ausdruck

$$(82) \quad \frac{1}{\varrho} - \psi \psi' (u_1 u'_1 + u_2 u'_2 + \dots + u_m u'_m)$$

eintritt. Die Lösung ist in bezug auf die Ebenen $y=0$ und $z=0$ symmetrisch, so daß die Gleichungen

$$(83) \quad \int_S \psi \zeta u_1 d\sigma = \sigma, \quad \int_S \psi \zeta u_2 d\sigma = 0, \quad \int_S \psi \zeta u_{m_1+1} d\sigma = 0, \dots, \int_S \psi \zeta u_m d\sigma = 0$$

tatsächlich erfüllt sind. Die Bedingungsgleichungen (80) enthalten nur die Parameter $r_3, \dots, r_{m_1}$.

Liegen nur Nulllösungen der ersten Kategorie vor ($m_1 = 2$), so sind keine Bedingungsgleichungen der Form (81) zu erfüllen. Zu jedem hinreichend kleinen Wert von $|\lambda|$ gehört eine und nur eine in bezug auf die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ symmetrische Gleichgewichtsfigur in der Nachbarschaft der Figur $T^{49)}$.

Ist T ein Rotationskörper, so ist, wie wir wissen, u_2 identisch gleich Null, während die von u_1 linear unabhängigen Nulllösungen entweder von der Gestalt $\mathfrak{F}(\beta)$ sind oder sich zu Gruppen von der Form $\mathfrak{F}_1(\beta) \cos k\bar{b}$, $\mathfrak{F}_1(\beta) \sin k\bar{b}$ vereinigen lassen. Es möge der Einfachheit halber nur ein Paar von Lösungen u_3 und u_4 der zuletzt genannten Art vorhanden sein^{49a)}. Wie wir gleich zeigen werden, *haben jetzt alle Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft von T mindestens eine durch die z -Achse hindurchgehende Symmetrieebene*. Wir brauchen im vorliegenden Falle diese Eigenschaft nicht als eine besondere Annahme oder Forderung einzuführen.

Es möge zunächst

$$\int_S \psi \zeta \mathfrak{F}_1(\beta) \sin k\bar{b} d\sigma \neq 0,$$

hingegen

$$\int_S \psi \zeta \mathfrak{F}_1(\beta) \cos k\bar{b} d\sigma = 0$$

sein. Wir setzen

$$\bar{b} = \frac{\pi}{2k} + \bar{b}.$$

Die Funktionen $\mathfrak{F}_1(\beta) \sin k\bar{b}$ und $\mathfrak{F}(\beta) \cos k\bar{b}$ sind Nulllösungen der Integralgleichung (1) II. Offenbar ist

$$\int_S \psi \zeta \mathfrak{F}_1(\beta) \sin k\bar{b} d\sigma = 0.$$

Aus der Integro-Differentialgleichung (73) folgt, daß die Ebene $\bar{b} = 0$, d. h. $\bar{b} = \frac{\pi}{2k}$ eine Symmetrieebene der Figur T_1 ist.

Es sei jetzt ferner

$$\int_S \psi \zeta \mathfrak{F}_1(\beta) \sin k\bar{b} d\sigma \neq 0, \quad \int_S \psi \zeta \mathfrak{F}_1(\beta) \cos k\bar{b} d\sigma \neq 0.$$

Wir wählen $k\alpha_0$ so, daß

$$\int_S \psi \zeta \mathfrak{F}_1(\beta) \sin k(\bar{b} + \alpha_0) d\sigma = 0$$

ausfällt. Setzt man $\bar{b} + \alpha_0 = \bar{b}$, so findet man wie vorhin, daß die Ebene $\bar{b} = -\alpha_0$ eine Symmetrieebene der Figur T_1 ist. Jetzt ist

$$\int_S \psi \zeta \mathfrak{F}_1(\beta) \sin k\bar{b} d\sigma = 0$$

Wir kommen in allen Fällen zu dem Resultat, daß es hier möglich

⁴⁹⁾ Ob dieser Fall in Wirklichkeit eintreten kann, bleibt dahingestellt.

^{49a)} Wir nehmen an, daß $\mathfrak{F}_1(\beta)$ in bezug auf die Ebene $z = 0$ symmetrisch ist.

st, die Figur T_1 so zu orientieren, daß $r_4 = 0$ wird, daß mithin T_1 die Ebene $y = 0$ zur Symmetrieebene hat.

Dieser Fall liegt bei den Maclaurinschen Ellipsoiden vor. Die Nachbarfiguren haben hier gewiß die beiden Symmetrieebenen $y = 0$ und $z = 0$.

§ 5.

Diskussion der Verzweigungsgleichung.

1. Wie in der ersten Abhandlung wollen wir uns zur Vereinfachung der folgenden Bezeichnungsweise bedienen.

Eine einparametrische lineare Reihe von (reellen) Gleichgewichtsfiguren, die den Werten des Parameters eines Vorzeichens entsprechen, wollen wir mit Schwarzschild⁵⁰⁾ einen *Arm von Gleichgewichtsfiguren* nennen. Eine ein- oder mehrparametrische lineare Reihe nennen wir *regulär*, wenn die zugehörige Funktion ζ in eine in der Umgebung der Werte Null der Parameter konvergierende Potenzreihe entwickelt werden kann. Eine einparametrische (von λ abhängende) reguläre Reihe besteht stets aus zwei entsprechend zu $\lambda \geq 0$ und $\lambda \leq 0$ gehörenden Armen. Demgegenüber bilden zwei so orientierte Arme von Gleichgewichtsfiguren nicht immer eine reguläre Reihe.

Der weiteren Betrachtung legen wir zunächst den einfachsten Fall $\gamma = 1$, $m = 3$ zugrunde. Der Körper besteht aus einer einzigen zusammenhängenden Flüssigkeitsmasse. Dabei sind noch verschiedene Fälle möglich. Es kann sich zunächst um einen Körper handeln, der keine Rotationsymmetrie um die z -Achse hat. Dann hat die Integralgleichung (1) II nur eine nicht triviale Lösung u_3 ; wir nehmen an, daß u_3 in bezug auf die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ symmetrisch ist. Es kann ferner S ein Rotationskörper um die z -Achse sein. In diesem Falle (in dem, wie wir wissen, $u_3 \equiv 0$ ist) gibt es entweder eine einzige Nulllösung der Form $\mathfrak{F}(\beta)$ oder ein Paar von Lösungen der Form $\mathfrak{F}_1(\beta) \cos k\beta$, $\mathfrak{F}_1(\beta) \sin k\beta$. Wir nehmen an, daß $\mathfrak{F}(\beta)$ und $\mathfrak{F}_1(\beta)$ in bezug auf die Ebene $z = 0$ symmetrisch sind. Wie vorhin auseinandergesetzt, wird in dem zuletzt genannten Falle von vornherein $r_4 = 0$ gesetzt, so daß sich alles so abspielt, als ob nur eine nicht triviale Lösung vorhanden wäre⁵¹⁾.

⁵⁰⁾ Vgl. Schwarzschild, „Die Poincarésche Theorie des Gleichgewichts einer homogenen rotierenden Flüssigkeitsmasse“, Neue Annalen der K. Sternwarte München, Bd. III, S. 69, insbes. S. 34 und S. 38—41. Es wird angenommen, daß die Figur T dem Werte 0 des Parameters entspricht.

⁵¹⁾ Für N_1 tritt hier indessen der Ausdruck

$$\frac{1}{\rho} - \psi \psi' (u_1 u_1' + u_3 u_3' + u_4 u_4')$$

in. Man beachte, daß $u_3 \equiv 0$ ist.

Da $q = 1$ ist, so darf man $s = 0$ annehmen. In der ersten Abhandlung ist S. 264—265 eine Diskussion der Verzweigungsgleichung (80) für $s = 0$ durchgeführt worden. Im Gegensatz hierzu wollen wir jetzt zunächst s von Null verschieden lassen, dagegen $\lambda = 0$ setzen. Wie wir wissen, gibt es gewiß eine lineare Reihe von Gleichgewichtsfiguren, die zu den Werten $\lambda = 0$ gehören. Es ist dies die Reihe der zu T ähnlichen und ähnlich gelegenen Figuren. Bringt man diese Tatsache mit der Beziehung (80) in Verbindung, so gewinnt man, wie wir gleich sehen werden, eine wichtige allgemeine Eigenschaft der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten.

Der Formel (80) gemäß ist

$$(84) \quad -s \int_S u_3 d\sigma + \lambda \int_S R^2 u_3 d\sigma + \mathfrak{P}_3(\lambda; s_1, r_3) = 0,$$

$$\mathfrak{P}_3 = \sum B_{\nu_0 \nu_1 \mu_3} \lambda^{\nu_0} s^{\nu_1} r_3^{\mu_3} \quad (\nu_0 + \nu_1 + \mu_3 > 1).$$

Die Koeffizienten $B_{002}, B_{003}, \dots$, können nicht sämtlich verschwinden, wenn nicht zugleich $C = \int_S u_3 d\sigma = 0$ ist. Andernfalls hätte nämlich die Gleichung (84) für $\lambda = 0$ und $s \neq 0$ keine mit s zugleich verschwindende Lösung.

Es sei etwa B_{001} das erste λ und s nicht enthaltende Glied, das nicht verschwindet. Ist $C \neq 0$, so erhält man, wenn man in (84) $\lambda = 0$ setzt und die entstandene Gleichung nach r_3 auflöst,

$$(85) \quad r_3 = \left(\frac{Cs}{B_{001}} \right)^{\frac{1}{2}} + \dots,$$

demnach

$$(86) \quad \zeta = \left(\frac{1}{\psi} - \int_S H_1 \frac{1}{\psi'} d\sigma' \right) s + \left(\frac{Cs}{B_{001}} \right)^{\frac{1}{2}} u_3 + \dots$$

Das Glied mit $s^{\frac{1}{2}}$ kann sich gegen kein einziges der nicht hingeschriebenen Glieder wegheben.

Ist jetzt T_1 eine Gleichgewichtsfigur, die aus T durch eine Ähnlichkeitsstromformation mit dem Verhältnis $1 + \alpha$ in bezug auf den Schwerpunkt entstanden ist, so ist, wie man leicht sieht,

$$(87) \quad 1 + \frac{s}{\mathfrak{B}} = (1 + \alpha)^2,$$

unter $\mathfrak{B}$ den konstanten Wert $V(X, Y, Z) + \frac{\omega R^2}{2\pi f}$ auf S verstanden. Aus (87) folgt, da α mit s verschwinden soll,

$$(88) \quad \alpha = -1 + \sqrt{1 + \frac{s}{\mathfrak{B}}} = \frac{s}{2\mathfrak{B}} + \dots$$

Wie man jetzt leicht sieht, hat $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\xi}{s}$ einen endlichen Wert. Dies steht aber wegen (86) mit der Annahme $C \neq 0$ im Widerspruch. Es ist also sicher

$$(89) \quad \int_S u_3 d\sigma = 0.$$

Ist T ein Rotationskörper um die z -Achse und ist $u_3 = \mathfrak{F}_1(\beta) \cos kb$, so ist die Gültigkeit der Gleichung (89) unmittelbar klar. Ist u_3 von der Form $\mathfrak{F}(\beta)$, so folgt aus (89), daß $\mathfrak{F}(\beta)$ nicht durchweg eines Vorzeichens sein kann.

Die Beziehung (89) gilt, sinngemäß verallgemeinert, auch wenn $q > 1$ ist, d. h. wenn der Körper aus mehreren getrennten Massen besteht. Jetzt hat s auf dem Rande der einzelnen Massen entsprechend die Werte $s_1, \dots, s_q$. Bei einer Ähnlichkeitstransformation mit dem Verhältnis α erhalten wir für die Werte $s_1, s_2, \dots, s_q$ in naheliegender Bezeichnungsweise die Ausdrücke

$$(90) \quad s_1 = 2\mathfrak{B}^{(1)}\alpha + \dots, \quad s_q = 2\mathfrak{B}^{(q)}\alpha + \dots$$

Wir finden jetzt

$$(91) \quad \sum_{j=1}^q \mathfrak{B}^{(j)} \int_{S^j} u_3 d\sigma = 0.$$

Ist $m > 3$, so erhält man in ähnlicher Weise gewisse zu (89) und (91) analoge Relationen.

2. Wir kehren jetzt zu dem besonderen Falle $q = 1$, $m = 3$ zurück und setzen $s = 0$ ein.

Das Gleichungssystem (80) geht jetzt über in

$$(92) \quad \begin{cases} \mathbf{A}\lambda + \mathfrak{P}(\lambda, r_3) = 0, \\ \mathbf{A} = \int_S R^2 u_3 d\sigma, \quad \mathfrak{P}(\lambda, r_3) = \sum_{j, \mathfrak{k}} B_{j, \mathfrak{k}} \lambda^j r_3^{\mathfrak{k}} \quad (j + \mathfrak{k} > 1). \end{cases}$$

Es sei zunächst $\mathbf{A} \neq 0$, und es sei $B_{0, \mathfrak{k}} r_3^{\mathfrak{k}}$ ($\mathfrak{k} \geq 2$) das erste λ nicht enthaltende Glied der Potenzreihe, das nicht verschwindet. Die Entwicklung von r_3 in der Umgebung des Wertes $\lambda = 0$ ist von der Form

$$(93) \quad r_3 = \left(-\frac{\mathbf{A}}{B_{0, \mathfrak{k}}}\lambda\right)^{\frac{1}{\mathfrak{k}}} + \mathfrak{P}^{(1)}\left\{\left(-\frac{\mathbf{A}}{B_{0, \mathfrak{k}}}\lambda\right)^{\frac{1}{\mathfrak{k}}}\right\},$$

unter $\mathfrak{P}^{(1)}$, wie später unter $\mathfrak{P}^{(2)}$, $\mathfrak{P}^{(3)}$, ... gewisse im Nullpunkt verschwindende Potenzreihen verstanden.

Ist $\mathfrak{k}$ eine gerade Zahl, so gibt es zwei reelle Reihen von Gleichgewichtsfiguren. Sie gehören zu denjenigen dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen Werten von λ , deren Vorzeichen mit dem Vorzeichen

von $-\frac{A}{B_{01}}$ übereinstimmt. Von der betrachteten Figur gehen zwei Arme von Gleichgewichtsfiguren aus.

Ist $\mathfrak{f}$ ungerade, so geht von T , wie man leicht sieht, für $\lambda > 0$ und für $\lambda < 0$ je ein Arm von Gleichgewichtsfiguren aus.

Es sei nunmehr $A = 0$ und $B_{02} \neq 0$. Die Gleichung (92) nimmt jetzt die Gestalt an

$$(94) \quad B_{02} r_3^2 + B_{11} r_3 \lambda + B_{20} \lambda^2 + \dots = 0.$$

Sie hat, wenn $B_{11}^2 - 4 B_{02} B_{20} \neq 0$ ist, zwei Lösungen von der Form

$$(95) \quad \begin{cases} r_3 = \frac{1}{2 B_{02}} (-B_{11} + \sqrt{B_{11}^2 - 4 B_{02} B_{20}}) \lambda + \mathfrak{P}^{(2)}(\lambda), \\ r_3 = \frac{1}{2 B_{02}} (-B_{11} - \sqrt{B_{11}^2 - 4 B_{02} B_{20}}) \lambda + \mathfrak{P}^{(3)}(\lambda). \end{cases}$$

Ist der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen positiv, so gibt es zwei sich in T kreuzende reguläre Reihen von Gleichgewichtsfiguren. Ist $B_{11}^2 - 4 B_{02} B_{20} < 0$, so gibt es in der Umgebung von T keine neuen (reellen) Gleichgewichtsfiguren; T ist eine isolierte Figur.

Sei endlich $B_{11}^2 - 4 B_{02} B_{20} = 0$, und es möge B_{20} nicht verschwinden. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit $B_{02} > 0$, demnach auch $B_{20} > 0$ annehmen. Für (94) können wir jetzt setzen

$$(\sqrt{B_{02}} r_3 + \sqrt{B_{20}} \lambda)^2 + \dots = 0.$$

Wir führen hier

$$r_3 = -\frac{\sqrt{B_{20}}}{\sqrt{B_{02}}} \lambda + \frac{\bar{r}_3}{\sqrt{B_{02}}}$$

ein und erhalten

$$(96) \quad \bar{r}_3^2 + \dots = 0.$$

Es sei $\bar{B}_{10} \lambda^i$ das erste $\bar{r}_3$ nicht enthaltende Glied höherer Ordnung in (96), das nicht verschwindet. Es gilt

$$\text{demnach} \quad \bar{r}_3 = [-\bar{B}_{10} \lambda^i]^{\frac{1}{2}} + \dots \quad (i \geq 3),$$

$$(97) \quad r_3 = -\frac{\sqrt{B_{20}}}{\sqrt{B_{02}}} \lambda + \frac{1}{\sqrt{B_{02}}} [-\bar{B}_{10} \lambda^i]^{\frac{1}{2}} + \dots$$

Ist $B_{20} = 0$, demnach auch $B_{11} = 0$, so finden wir einfacher

$$(98) \quad r_3 = -\left[\frac{B_{10} \lambda^i}{B_{02}}\right]^{\frac{1}{2}} + \dots$$

Es möge jetzt zugleich

$$A = 0, \quad B_{02} = 0$$

ausfallen; hingegen seien $B_{11} \neq 0$, $B_{20} \neq 0$. Die erste nicht verschwindende Potenz von r_3 in (92) sei r_3^n ($n > 2$). Die Gleichung (92) nimmt jetzt die Gestalt an

$$(99) \quad B_{11} r_3 \lambda + B_{0n} r_3^n + B_{0n_1} r_3^{n_1} + \dots + \lambda (B_{20} \lambda + B_{30} \lambda^2 + B_{12} r_3^2 + \dots) = 0.$$

Für r_3 erhält man die beiden Entwicklungen

$$(100) \quad r_3 = -\frac{B_{20}}{B_{11}} \lambda + \mathfrak{P}^{(4)}(\lambda),$$

$$(101) \quad r_3 = \left[-\frac{B_{11}}{B_{0n}} \lambda \right]^{\frac{1}{n-1}} + \dots$$

Die Entwicklung (100) liefert eine reguläre Reihe von Gleichgewichtsfiguren, die Entwicklung (101) zwei Arme von Figuren, die (für gerade n) den Werten von λ verschiedenen, oder (für ungerade n) des gleichen Vorzeichens entsprechen.

Die vorstehenden Entwicklungen gelten, worauf zu Anfang dieses Paragraphen bereits hingewiesen wurde, sinngemäß auch, wenn T ein Rotationskörper um die z -Achse ist und die Integralgleichung (1) II außer der trivialen Lösung u_1 (u_2 ist $\equiv 0$) nur noch ein Paar Nulllösungen von der Form $u_3 = \mathfrak{F}_1(\beta) \cos k\beta$, $u_4 = \mathfrak{F}_1(\beta) \sin k\beta$ hat. Wie wir wissen, hat man, da $r_4 = 0$ gemacht werden kann, hier so zu verfahren, wie wenn u_4 nicht vorhanden wäre, nur ist für N_1 der Ausdruck $\frac{1}{\varrho} - \psi \psi' (u_1 u_1' + u_3 u_3' + u_4 u_4')$ einzuführen.

Wie wir jetzt zeigen wollen, bietet dieser Fall noch einige wichtige Eigentümlichkeiten dar.

Setzt man $r_3 = r_4 = 0$, so ergibt die Integro-Differentialgleichung (73), wie man leicht sieht, für ζ eine in bezug auf die Ebenen $z = 0$ und $\beta = \frac{n\pi}{2k}$ ($n = 0, 1, \dots, (2k-1)$) symmetrische Lösung. Es sei S_1 die Fläche ξ, η, ζ . Offenbar ist für diese, in der Tat, $r_3 = r_4 = 0$.

Wir denken uns jetzt die Koordinatenebenen $x = 0$ und $y = 0$ um irgendeinen Winkel $\Theta_0 < \frac{\pi}{2}$ gedreht. Das neue Koordinatensystem heiße x', y', z . Die Integralgleichung (1) II hat augenscheinlich ein System nichttrivialer Nulllösungen, das in leicht ersichtlicher Schreibweise in der Form

$$\mathfrak{F}_1(\beta) \cos k\beta', \quad \mathfrak{F}_1(\beta) \sin k\beta'$$

dargestellt werden kann. Wie man leicht sieht, folgt für T_1 aus $r_3 = r_4 = 0$ auch $r_3' = r_4' = 0$. Aus dem Eindeutigkeitssatz schließen wir, daß auch die Ebenen $\beta' = \frac{n\pi}{2k}$ ($n = 0, 1, \dots, (2k-1)$) Symmetrieebenen des Körpers sind. Also hat T_1 Rotationssymmetrie um die z -Achse.

Die Figur T gehört demnach einer regulären Reihe von Gleichgewichtsfiguren mit Rotationssymmetrie um die z -Achse an. Sie kann dabei zugleich den Ausgang für einen oder mehrere Arme weiterer Gleichgewichtsfiguren bilden. Man überzeugt sich ähnlich wie vorhin, daß diese Figuren k Symmetrieebenen $\delta = 0, \frac{\pi}{k}, \dots, \frac{(k-1)\pi}{k}$ haben.

Offenbar muß im vorliegenden Falle die linke Seite der Verzweigungsgleichung (92) r_3 oder eine Potenz von r_3 als gemeinsamen Faktor enthalten. Mit anderen Worten ist jetzt

$$A = 0, \quad B_{j,0} \lambda^j = 0 \quad (j > 1)$$

Ist $B_{02} \neq 0$, $B_{11} \neq 0$, so geht (92) nach Kürzung mit r_3 über in

$$B_{02} r_3 + B_{11} \lambda + \dots = 0.$$

In T kreuzen sich zwei reguläre Reihen von Gleichgewichtsfiguren, von denen eine, wie wir soeben sahen, aus Rotationskörpern besteht.

Es sei jetzt weiter $B_{02} = 0$, $B_{11} \neq 0$, und es sei $B_{0n} r_3^n$ ($n > 2$) das erste λ nicht enthaltende Glied, das nicht verschwindet. Die Gleichung (92) gibt nach Kürzung mit r_3

$$B_{11} \lambda + B_{0n} r_3^{n-1} + \dots = 0.$$

Von T gehen außer der regulären Reihe von Körpern mit Rotationssymmetrie um die z -Achse noch zwei Arme von Gleichgewichtsfiguren mit den k Symmetrieebenen $\delta = 0, \frac{\pi}{k}, \dots, \frac{(k-1)\pi}{k}$ aus. Man überzeugt sich leicht, daß die Ebene $\delta = \frac{\pi}{2k}$ keine Symmetrieebene mehr ist. Dreht man eine hierzu gehörige Figur um den Winkel $\frac{\pi}{k}$, so gewinnt man offenbar eine neue Gleichgewichtsfigur, für die ebenfalls $r_4 = 0$ ist. Die beiden Arme gehen demnach durch eine Drehung von $\frac{\pi}{k}$ ineinander über. Sie gehören natürlich zu demselben Werte von λ . Hieraus folgt, daß in der zuletzt hingeschriebenen Gleichung n ungerade sein muß.

Ist T ein Rotationskörper, hat ferner die Integralgleichung (1) II nichttriviale Nullösungen, die sämtlich von der Form $u_3 = \mathfrak{F}(\mathfrak{z})$ sind, so sind alle Nachbarfiguren Rotationskörper um die z -Achse.

Man gehe in der Tat von dem Koordinatensystem x, y, z zu dem System x', y', z über. Die Gleichgewichtsfigur T_1 genügt einer zu (73) analogen Integro-Differentialgleichung, in der $r'_3 = r_3$, $r'_4 = r_4$, ... zu setzen ist. Offenbar ist die Ebene $y' = 0$, demnach jede durch die z -Achse hindurchgehende Ebene eine Symmetrieebene des Körpers.

Es sei noch einmal T ein Rotationskörper, und es möge (1) II ein Paar nicht trivialer Nulllösungen: $\mathfrak{F}_1(\bar{s}) \cos k\bar{b}$, $\mathfrak{F}_1(\bar{s}) \sin k\bar{b}$ haben. Wie wir schon wissen, gehört T gewiß einer regulären Reihe von Gleichgewichtsfiguren an. Wir nehmen ferner an, daß von T ein Arm von Gleichgewichtsfiguren Θ , die keine Rotationskörper um die z -Achse sind, ausgeht. Es sei $\bar{T}$ ein Körper aus Θ und es sei $\bar{u}_2$ die triviale Nulllösung der zu $\bar{T}$ gehörigen, zu (1) II analogen Integralgleichung. Geht nun $\bar{T}$ in T stetig über, so konvergiert $\bar{u}_2$ gegen eine normierte Nulllösung der Integralgleichung (1) II. Da nun $\bar{u}_2$ beim Übergang von σ zu σ^* das Vorzeichen wechselt, so ist mithin

$$\lim_{\bar{T} \rightarrow T} \bar{u}_2 = \mathfrak{F}_1(\bar{s}) \sin k\bar{b}.$$

Setzt man in naheliegender Schreibweise

$$\bar{R} \cos \bar{p} = \bar{c} \bar{u}_2,$$

so ist offenbar

$$\lim_{\bar{T} \rightarrow T} \bar{c} = 0,$$

Sei jetzt T irgendeine Gleichgewichtsfigur, die die Ebenen $x=0$, $y=0$, $z=0$ zu Symmetrieebenen hat, und es möge (1) II nur eine nichttriviale Lösung u_3 haben. Diese sei in bezug auf die Ebenen $y=0$ und $z=0$ symmetrisch und nehme in den Punkten, die in bezug auf die Ebene $x=0$ symmetrisch liegen, entgegengesetzt gleiche Werte an. Die Figur T gehört sicher einer regulären Reihe von Gleichgewichtsfiguren an, die in bezug auf die Ebenen $x=0$, $y=0$, $z=0$ symmetrisch sind. Man gewinnt sie, wie man leicht sieht, indem man in der Integrodifferentialgleichung (73) $\bar{r}_3 = 0$ setzt.

Die vorhin gefundenen allgemeinen Sätze werden wir im sechsten Kapitel auf die Flüssigkeitsellipsoide anwenden.

Wir kehren jetzt zu der Verzweigungsgleichung (92) zurück und betrachten nur noch den weiteren besonderen Fall, daß A und alle B_{ji} verschwinden. Die Gleichung (92) ist alsdann identisch erfüllt. Die Funktion

$$(102) \quad \zeta = r_3 u_3 - \frac{1}{\psi} R^2 \lambda + \lambda \int_S H_1 \frac{1}{\psi'} R'^2 d\sigma' + \sum b_{\nu_0 \mu_3} \lambda^{\nu_0} r_3^{\mu_3} \quad (\nu_0 + \mu_3 > 1)$$

erfüllt für alle hinreichend kleinen Werte von $|r_3|$ und $|\lambda|$ die Integrodifferentialgleichungen (73) und (52) I. Wie in dem Kapitel I § 1 ausgeführt, kann man durch eine Ähnlichkeitstransformation erreichen, daß alle aus (102) zu gewinnenden Gleichgewichtsfiguren dasselbe Volumen haben. Zu einem jeden hinreichend kleinen Wert von λ gehört demnach

eine stetige Schar von Gleichgewichtsfiguren gleichen Volumens. Setzt man in (102) insbesondere $\lambda = 0$, so erhält man eine stetige Schar von Gleichgewichtsfiguren

$$(103) \quad \zeta = r_3 u_3 + \sum_{\mu_3=2}^{\infty} b_{0\mu_3} r_3^{\mu_3},$$

die zu dem Werte ω der Winkelgeschwindigkeit gehören und, da sie in bezug auf die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ symmetrisch sind, nicht aus T durch eine Schraubung um die Rotationsachse abgeleitet worden sind.

Die Existenz einer Schar von Gleichgewichtsfiguren dieser Art ist also eine notwendige Bedingung dafür, daß der jetzt betrachtete besondere Fall eintreten kann. Gleichgewichtsfiguren dieser Art sind nicht bekannt.

Bei den Maclaurinschen Ellipsoiden kann dieser Fall, wie Liapounoff durch eine ins einzelne gehende Diskussion der Verzweigungsgleichung gezeigt hat, nicht eintreten⁵²⁾.

Zu analogen Resultaten gelangt man, wenn man allgemeiner $q > 1$, $m > 3$ annimmt.

Aus den soeben durchgeführten Betrachtungen folgt, daß gewiß $A = 0$ ist, wenn T zu einer regulären Reihe von Gleichgewichtsfiguren gehört. Das gleiche gilt auch noch, wenn $q = 1$, $m > 3$ ist. Setzt man in (80) $s = 0$, $r_3 = \mathfrak{P}^{(3)}(\lambda)$, ..., $r_m = \mathfrak{P}^{(m)}(\lambda)$, und geht man zur Grenze $\lambda = 0$ über, so findet man in der Tat

$$(104) \quad \int_S R^2 u_3 d\sigma = 0, \quad \dots, \quad \int_S R^2 u_m d\sigma = 0.$$

Ist $q > 1$, so treten zu den Gleichungen (80) weitere q Bedingungsgleichungen, die aussagen, daß das Volumen jeder Einzelmasse einen vorgeschriebenen Wert hat, hinzu. Dem Gesamtvolumen der Flüssigkeit kann man durch eine Ähnlichkeitstransformation in bezug auf den Koordinatenursprung einen beliebigen Wert in der Nachbarschaft des Ausgangswertes erteilen. Irgendeine der q Bedingungsgleichungen kann man darum streichen.

3. In dem Kapitel IV § 2 der ersten Abhandlung ist gezeigt worden, daß die vorhin gefundene Lösung der Integro-Differentialgleichung (9) bzw. (73) die einzige Lösung ist, die zu vorgegebenen Werten von $\lambda, s_1, \dots, s_q$ bzw. $\lambda, s_1, \dots, s_q, r_3, \dots, r_m$ gehört, wenn vorausgesetzt wird, daß diese Werte, wie auch $\zeta, \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$, dem absoluten Betrage nach hinreichend klein sind. Damit ist zugleich gezeigt (vgl. § 1 IV und § 2 IV der ersten Abhandlung), daß die von uns gefundenen Gleichgewichtsfiguren

⁵²⁾ Vgl. A. Liapounoff, loc. cit. Abh. I Fußnote ¹⁰⁾, Abh. 2 S. 214—215 Abh. 3 passim, insb. S. 2.

die Gesamtheit der Gleichgewichtsfiguren T_1 in der Umgebung von T erschöpfen, die folgende Eigenschaften haben. Sie bestehen aus einer endlichen Anzahl von Massen, die von Jordanschen Flächen begrenzt sind und ein bestimmtes Volumen im Sinne von Peano und Jordan haben. Das Volumen von T_1 liegt in der Umgebung des Volumens von T , die Winkelgeschwindigkeit ω_1 liegt in der Umgebung von ω .

Man kann die Gaußschen Parameter ξ und η so wählen, daß die artesischen Koordinaten der Punkte auf einer jeden Randkomponente von S_1 , als Funktionen jener Parameter aufgefaßt, stetige Ableitungen aller Ordnungen haben (vgl. § 1 IV der ersten Abhandlung).

Der soeben erwähnte Vollständigkeitssatz läßt sich wie folgt erweitern. Es seien ζ und $\underline{\zeta}$ zwei Gleichgewichtsfiguren in der Umgebung von T , die zu denselben Werten von $\lambda, s_1, \dots, s_q$ gehören. Was die Werte $r_3, \dots, r_m; \underline{r}_3, \dots, \underline{r}_m$ betrifft, so sei bekannt, daß

$$|\underline{r}_3 - r_3|, \dots, |\underline{r}_m - r_m| < \text{Const } \varepsilon_2 \Omega$$

gilt. Hier bezeichnet, wie in Kapitel IV § 2 der ersten Abhandlung, Ω den größten der drei Werte

$$\text{Max } |\bar{\xi}|, \quad \text{Max } \left| \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \xi} \right|, \quad \text{Max } \left| \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \eta} \right| \quad (\bar{\xi} = \underline{\zeta} - \zeta).$$

Es ist ferner

$$|\zeta|, \quad \left| \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right|, \quad \left| \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right|; \quad |\underline{\zeta}|, \quad \left| \frac{\partial \underline{\zeta}}{\partial \xi} \right|, \quad \left| \frac{\partial \underline{\zeta}}{\partial \eta} \right| < \varepsilon_2.$$

Dann ist, wie sich mit genau denselben Mitteln wie an der zuletzt genannten Stelle beweisen läßt,

$$\bar{\xi} \equiv 0, \quad \underline{\zeta} \equiv \zeta, \quad \underline{r}_3 = r_3, \quad \dots, \quad \underline{r}_m = r_m.$$

Von diesem Satz werden wir im Kapitel VI § 1 Gebrauch machen.

§ 6.

Rotierende Flüssigkeiten in einem Außenfelde.

Die Ergebnisse dieses und des ersten Kapitels lassen sich ohne Schwierigkeiten auf den Fall ausdehnen, daß neben den bis jetzt allein betrachteten Anziehungs- und Zentrifugalkräften noch weitere Kräfte wirken. Wir nehmen zunächst an, daß diese Kräfte eine Kräftefunktion $\mathcal{G}(x, y, z)$ haben, daß $\mathcal{G}(x, y, z)$ in einem Gebiete, das T in seinem Innern enthält, analytisch und regulär ist und daß

$$\mathcal{G}(x, y, z) = \mathcal{G}(x, -y, z) = \mathcal{G}(x, y, -z)$$

ist⁵³⁾. Die zusätzlichen Kräfte können insbesondere von der Anziehung starrer mitrotierender Massen, die in bezug auf die Ebenen $y=0$ und $z=0$ symmetrisch verteilt sind, herrühren. Wir nehmen an, daß die Ebenen $y=0$ und $z=0$ Symmetrieebenen des Körpers T sind.

Für die Grundgleichung (5) des ersten Kapitels tritt jetzt die erweiterte Gleichung

$$(106) \quad \left\{ \begin{aligned} &V(X_1, Y_1, Z_1) - V(X, Y, Z) + G(X_1, Y_1, Z_1) - G(X, Y, Z) \\ &= s + \frac{\omega^2}{2\kappa f}(X^2 + Y^2) - \frac{\omega_1^2}{2\kappa f}(X_1^2 + Y_1^2) \end{aligned} \right.$$

ein. Wir setzen, wenn wieder (ξ, η, ζ^*) den Punkt (x, y, z) bezeichnet,

$$(107) \quad G(x, y, z) = \Gamma(\xi, \eta, \zeta^*).$$

Dann ist

$$G(X_1, Y_1, Z_1) - G(X, Y, Z) = \zeta \frac{\partial}{\partial \nu} \Gamma(\xi, \eta, 0) + \frac{\zeta^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \Gamma(\xi, \eta, 0) + \dots$$

demnach wegen (37) I

$$(108) \quad \left\{ \begin{aligned} &U^{(1)} + U^{(2)} + U^{(3)} + \dots + \zeta \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} + \frac{1}{2} \zeta^2 \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \nu^2} + \dots \\ &= s + \frac{\omega^2}{2\kappa f}(X^2 + Y^2) - \frac{\omega_1^2}{2\kappa f}(X_1^2 + Y_1^2). \end{aligned} \right.$$

Die Schwerkraft im Punkte (ξ, η) steht auf S senkrecht und ist (positiv nach außen gerichtet) gleich

$$(109) \quad \kappa f \left[\frac{\partial}{\partial \nu} W(\xi, \eta, 0) + \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} \right] + \omega^2 R \tau.$$

Wir setzen jetzt, in Verallgemeinerung der im ersten Kapitel eingeführten Bezeichnung,

$$(110) \quad \kappa f \left[\frac{\partial}{\partial \nu} W(\xi, \eta, 0) + \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} \right] + \omega^2 R \tau = \kappa f \psi^{54)}.$$

Aus (108), (41) I, (51) I und (110) ergibt sich

$$(111) \quad \left\{ \begin{aligned} &\psi \zeta + \int_S \frac{1}{\varrho} \zeta' d\sigma' = s - R^2 \lambda - \frac{\omega^2}{2\kappa f}(a^2 + b^2) \zeta^2 - 2 R \tau \lambda \zeta \\ &- (a^2 + b^2) \lambda \zeta^2 - U^{(2)} - U^{(3)} - \dots - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \nu^2} \zeta^2 - \dots \end{aligned} \right.$$

⁵³⁾ Die auf die Einheit der Masse wirkende äußere Kraft hat die Komponenten $\kappa f \frac{\partial G}{\partial x}$, $\kappa f \frac{\partial G}{\partial y}$, $\kappa f \frac{\partial G}{\partial z}$. Man beachte, daß das Koordinatenkreuz und damit auch das Feld $G(x, y, z)$ rotiert.

⁵⁴⁾ Die Funktion ψ geht für $\Gamma = \text{const}$ in die bis jetzt mit ψ bezeichnete Funktion über.

Diese Integro-Differentialgleichung tritt an Stelle der Gleichung (52) I ein.

Es möge das Zusatzfeld Γ von z unabhängig sein.

Wie man sich leicht überzeugt, hat in diesem Falle die Integralgleichung

$$(112) \quad \psi \zeta + \int_S \frac{1}{\varrho} \zeta' d\sigma' = 0$$

gewiß die triviale Lösung $u_1 = \text{const. } c$. Hat das Feld überdies Rotationsymmetrie um die z -Achse, so hat (112) noch die weitere triviale Lösung $u_2 = \text{const. } R \cos p$. Ist T ein Rotationskörper um die z -Achse, so ist $u_2 \equiv 0$ zu setzen. Ist das aus Zentrifugalkraft und Zusatzfeld resultierende Feld von y unabhängig, so hat (112) die triviale Lösung $\tilde{u} = \text{const. } b$. Die Nachbarfigur kann man, wie man sich leicht überzeugt, so orientieren, daß im Falle 1.

$$(113) \quad \int_S \psi u_1 \zeta d\sigma = 0,$$

im Falle 2. außerdem noch

$$(114) \quad \int_S \psi u_2 \zeta d\sigma = 0$$

st. Im Falle 3. tritt hierfür die Beziehung

$$(115) \quad \int_S \psi \tilde{u} \zeta d\sigma = 0$$

ein.

Die weitere Behandlung des Problems verläuft ganz analog wie in dem besonderen Falle $\Gamma = \text{const.}$ Für N tritt in dem Falle 1. die Funktion

$$(116) \quad \frac{1}{\varrho} - \psi \psi' u_1 u_1',$$

im Falle 3. die Funktion

$$(117) \quad \frac{1}{\varrho} - \psi \psi' (u_1 u_1' + \tilde{u} \tilde{u}')$$

ein.

Im allgemeinen wird man jetzt, auch wenn $q=1$ ist, nicht mehr durch eine Ähnlichkeitstransformation auf eine neue Gleichgewichtsfigur geführt. Man darf darum nicht mehr $s=0$ setzen, wenn man eine Figur T_1 von vorgegebenem Volumen bestimmen will.

Es kann natürlich auch vorkommen, daß die Integralgleichung (112) keine trivialen Lösungen hat; dann tritt für N einfach der Kern $\frac{1}{\varrho}$ ein.

Die vorstehenden Betrachtungen gelten in ähnlicher Weise, auch wenn das Zusatzfeld $G(x, y, z)$ unsymmetrisch ist. Hier wird man die Voraussetzung, daß T Symmetrieebenen hat, im allgemeinen fallen lassen müssen.

Sei T eine Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeiten, die unter der Wirkung eines Fremdfeldes $\kappa f G$ steht, und es möge jetzt ein von einem Parameter $\hat{s}$ abhängiges in bezug auf die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ symmetrisches Zusatzfeld $\kappa f \hat{s} \hat{G}(x, y, z; \hat{s})$ hinzukommen. Wir nehmen an, daß $\hat{G}(x, y, z; \hat{s})$ für alle x, y, z in einem Gebiete, das T in seinem Innern enthält und für alle hinreichend kleinen $|\hat{s}|$ analytisch und regulär ist. Durch eine geringfügige Modifikation der vorstehenden Betrachtungen läßt sich die Frage beantworten, ob es für genügend kleine $|\hat{s}|$ in der Nachbarschaft von T Gleichgewichtsfiguren gibt, die zu dem Außenfelde $\kappa f(G + \hat{s} \hat{G})$ gehören.

Die fundamentale Integro-Differentialgleichung nimmt jetzt die Form an

$$(116) \left\{ \begin{array}{l} \psi \zeta + \int_{\hat{s}} \frac{1}{\rho} \zeta' d\sigma' = s - R^2 \lambda - \hat{s} \hat{\Gamma} - \hat{s} \zeta \frac{\partial}{\partial \nu} \hat{\Gamma} - \frac{\omega^2}{2 \kappa f} (a^2 + b^2) \zeta^2 \\ - 2 R \tau \lambda \zeta - (a^2 + b^2) \lambda \zeta^2 - U^{(2)} - U^{(3)} - \dots - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \nu^2} \zeta^2 - \dots \\ - \hat{s} \frac{\zeta^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \hat{\Gamma} - \dots; \hat{\Gamma}(\xi, \eta, \zeta) = \hat{G}(x, y, z; \hat{s}); \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}(\xi, \eta, 0). \end{array} \right.$$

Viertes Kapitel.

Stabilitätsbetrachtungen.

§ 1.

Problemstellung.

Es sei T eine im allgemeinen aus $q (\geq 1)$ getrennten Massen bestehende Gleichgewichtsfigur. Sei T_1 irgendein aus q getrennten Massen bestehender Körper in der Nachbarschaft von T . Die Volumina zusammengehöriger Paare von Einzelmassen von T und T_1 seien einander gleich. Es möge schließlich der Schwerpunkt von T_1 sich mit demjenigen von T decken. Es sei besonders darauf hingewiesen, daß mit T_1 von nun an nicht mehr notwendig eine Gleichgewichtsfigur in der Nachbarschaft von T bezeichnet wird. Die Frage, wann die Figur T als stabil zu betrachten ist, ist vielfach erörtert worden, kann aber keineswegs als definitiv beantwortet gelten.

Wir wollen unseren Betrachtungen das folgende auch von Thomson und Tait, Poincaré und Liapounoff benutzte Kriterium zugrunde legen.

Es sei J das Trägheitsmoment von T . Das Moment der Bewegungsgröße um die Umdrehungsachse ist dann gleich ωJ . Das Trägheitsmoment von T_1 in bezug auf die Rotationsachse sei J_1 . Wird zur Vereinfachung

$$(1) \quad \frac{\omega^2 J^2}{f \kappa} = \tilde{M}$$

gesetzt, so soll T stabil heißen, wenn der Ausdruck

$$(2) \quad \Lambda_1 = \frac{\tilde{M}}{J_1} - \int_{T_1} \int_{T_1} \frac{dv d\bar{v}}{D}$$

($dv, d\bar{v}$ Volumelemente in T_1 , D ihre Entfernung)

für die gegebene Gleichgewichtsfigur, d. h. für $T_1 = T$ den kleinsten Wert annimmt⁵⁵⁾).

Es liegt hier, worauf in der Einleitung bereits hingewiesen worden ist, ein Variationsproblem besonderer Art vor. Jedem System geschlossener Flächen mit stetiger Normale S_1 in der Nachbarschaft erster Ordnung von S , die vorgeschriebene Volumina einschließen, ist ein Zahlwert (ein Funktional) zugeordnet. Der Fläche S entspricht ein stationärer Wert des betrachteten Funktional. Es ist zu untersuchen, ob ein (schwaches) Minimum vorliegt. Diese Aufgabe gehört zu den Problemen einer neuen Variationsrechnung, auf die Herr Hadamard vor einiger Zeit aufmerksam gemacht hat.

Sei Λ der Wert von Λ_1 für die untersuchte Gleichgewichtsfigur. Der Ausdruck $\Lambda_1 - \Lambda$ soll, wenn T stabil ist, für alle T_1 in einer Umgebung erster Ordnung von T nicht negativ sein.

Um notwendige und hinreichende Kriterien hierfür aufzustellen, ist es vor allem notwendig, für $\Lambda_1 - \Lambda$ einen nach Größen verschiedener Ordnung in bezug auf $\zeta, \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$ fortschreitenden Ausdruck

$$(3) \quad \Lambda_1 - \Lambda = \Lambda^{(2)} + \Lambda^{(3)} + \dots$$

zu gewinnen. Das allgemeine Glied $\Lambda^{(n)}$ ist von der Ordnung n ; dies besagt, daß, wenn man $\alpha \zeta$ für ζ schreibt, $\Lambda^{(n)}$ in $\alpha^n \Lambda^{(n)}$ übergeht.

In dem besonderen Falle der Maclaurinschen und der Jacobischen Ellipsoide hat Liapounoff durch eine lange Kette von Schlüssen einen expliziten Ausdruck für $\Lambda^{(2)}$ sowie eine Abschätzung für den Rest $\Lambda^{(2)} + \Lambda^{(4)} + \dots$ gegeben⁵⁶⁾.

⁵⁵⁾ Es handelt sich hier zunächst um die sogen. absolute Stabilität. Über die bedingte Stabilität gegenüber bestimmten Klassen variierter Figuren vergleiche weiter unten (§ 7).

⁵⁶⁾ Vgl. A. Liapounoff, loc. cit.¹⁹⁾, S. 22–41.

In den beiden jetzt folgenden Paragraphen wird unter Benutzung der Resultate und der Methoden des ersten Kapitels für beliebige Gleichgewichtsfiguren der vollständige Ausdruck (3) abgeleitet. Für den Rest $\Lambda^{(3)} + \Lambda^{(4)} + \dots$ ergibt sich dabei durch sehr einfache Überlegungen eine zu der Liapounoffschen analoge, diesmal allgemein gültige Abschätzung

§ 2.

Die Fundamentalformel.

Es gilt

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{T_1} \int_{T_1} \frac{dv d\bar{v}}{D} - \int_{T_1} \int_{T_1} \frac{dv d\bar{v}}{D} = \int_{T_1} V_1 dv - \int_{T_1} V dv \\ & = \int_{T_1} V dv - \int_{T_1} V dv + \int_{T_1} (V_1 - V) dv = \int_{T_1 - T} V dv + \int_{T_1} (V_1 - V) dv. \end{aligned} \right.$$

Ferner ist

$$(5) \quad \int_{T_1} (V_1 - V) dv = \int_{T_1} dv \left\{ \int_{T_1 - T} \frac{d\bar{v}}{D} \right\} = \int_{T_1 - T} d\bar{v} \left\{ \int_{T_1} \frac{dv}{D} \right\} = \int_{T_1 - T} V_1 d\bar{v} = \int_{T_1 - T} V dv + \int_{T_1 - T} (V_1 - V) dv$$

Wir können demnach schreiben

$$(6) \quad \Lambda_1 - \Lambda = \tilde{M} \left\{ \frac{1}{J_1} - \frac{1}{J} \right\} - \int_{T_1 - T} (V + V_1) dv = P_1 - P_2.$$

Betrachten wir zunächst den Ausdruck P_2 näher. Wir schalten wie im Kapitel I zwischen S und S_1 eine stetige Schar von Flächen $S_t = S + t(S_1 - S)$ ein ($0 \leq t \leq 1$). Dem Punkte (ξ, η) auf S entspricht auf S_t der Punkt mit den (krummlinigen) Koordinaten $\xi, \eta, t\zeta$. Der von S_t begrenzte Körper heiße T_t ; sein Potential wird mit V_t bezeichnet.

Wir setzen (vgl. (4) und (5))

$$(7) \quad P_2(t) = \int_{T_t} \int_{T_t} \frac{dv d\bar{v}}{D} - \int_{T_t} \int_{T_t} \frac{dv d\bar{v}}{D} = \int_{T_t - T} (V + V_t) dv.$$

Offenbar ist

$$(8) \quad P_2(t + \Delta t) = \int_{T_{t+\Delta t}} \int_{T_{t+\Delta t}} \frac{dv d\bar{v}}{D} - \int_{T_{t+\Delta t}} \int_{T_{t+\Delta t}} \frac{dv d\bar{v}}{D},$$

demnach

$$(9) \quad P_2(t + \Delta t) - P_2(t) = \int_{T_{t+\Delta t}} \int_{T_{t+\Delta t}} \frac{dv d\bar{v}}{D} - \int_{T_t} \int_{T_t} \frac{dv d\bar{v}}{D}.$$

Für die Differenz rechterhand erhält man wegen (7) den Ausdruck

$$(10) \quad \int_{T_i + \Delta t - T_i} (V_i + V_{i+\Delta t}) dv^{57}.$$

Geht man jetzt zur Grenze $\Delta t \rightarrow 0$ über, so erhält man

$$(11) \quad \frac{dP_2(t)}{dt} = 2 \int_{S_i} \zeta \cos \varphi_i U_i d\sigma_i^{58}.$$

Hier bezeichnet $d\sigma_i$ das Element der Fläche S_i , φ_i den von der Außennormale in σ_i an S_i mit der durch σ_i hindurchgehenden Außennormale (ν) an S eingeschlossenen Winkel.

Da nun

$$(12) \quad P_2 = P_2(1) = \int_0^1 \frac{dP_2(t)}{dt} dt$$

ilt, so ist

$$(13) \quad P_2 = 2 \int_0^1 dt \int_{S_i} \zeta U_i \cos \varphi_i d\sigma_i.$$

Wegen (36) I und (37) I ist

$$(14) \quad P_2 = 2 \int_0^1 dt \int_{S_i} \zeta \cos \varphi_i [U + tU^{(1)} + t^2 U^{(2)} + t^3 U^{(3)} + \dots] d\sigma_i.$$

Nach (41) I ist

$$(15) \quad U^{(1)} = \zeta \frac{\partial}{\partial \nu} W(\xi, \eta, 0) + \int_S \frac{1}{\rho} \zeta' d\sigma'.$$

Betrachten wir jetzt den Ausdruck P_1 .

Es ist, wenn wir $J_1 - J = \Delta J$ setzen und ε so klein annehmen,

daß z. B. $\left(\frac{\Delta J}{J}\right) < \frac{1}{2}$ wird,

$$(16) \quad \begin{aligned} P_1 &= \tilde{M} \left(\frac{1}{J_1} - \frac{1}{J} \right) = \tilde{M} \left(\frac{1}{J + \Delta J} - \frac{1}{J} \right) = \frac{\tilde{M}}{J} \left(\frac{1}{1 + \frac{\Delta J}{J}} - 1 \right) \\ &= \frac{\tilde{M}}{J} \left(-\frac{\Delta J}{J} + \left(\frac{\Delta J}{J} \right)^2 - \dots \right) = -\frac{\tilde{M} \Delta J}{J^2} \left(1 - \frac{\Delta J}{J} + \left(\frac{\Delta J}{J} \right)^2 - \dots \right) \\ &= -\frac{\omega^2}{f \kappa} \Delta J \left(1 - \frac{\Delta J}{J} + \left(\frac{\Delta J}{J} \right)^2 - \dots \right), \end{aligned}$$

⁵⁷⁾ Für T und T_i treten jetzt T_i und $T_i + \Delta t$ ein.

⁵⁸⁾ In dem Kapitel I wurde

$$V_i(x, y, z) = W_i(\xi, \eta, \zeta), \quad W_i(\xi, \eta, t\zeta) = U_i(\xi, \eta)$$

gesetzt.

demnach

$$(17) \quad \Lambda_1 - \Lambda = -\frac{\omega^2}{f\kappa} \Delta J + \frac{\omega^2}{f\kappa} \frac{(\Delta J)^2}{J} \left(1 - \frac{\Delta J}{J} + \left(\frac{\Delta J}{J}\right)^2 - \dots\right) - 2 \int_0^1 dt \int_{S_i} \zeta \cos \varphi_i [U + tU^{(1)} + t^2 U^{(2)} + \dots] d\sigma_i$$

Wir bezeichnen mit R_i die Entfernung des Punktes $\xi, \eta, t\zeta$ von der Rotationsachse. Es gilt

$$(18) \quad \Delta J = \int_{T_1-T} R_i^2 dv = \int_0^1 dt \int_{S_i} R_i^2 \zeta \cos \varphi_i d\sigma_i.$$

Es ist ferner

$$(19) \quad \begin{aligned} R_i^2 &= R^2 + 2(aX + bY)t\zeta + (a^2 + b^2)t^2\zeta^2 \\ &= R^2 + 2Rt\tau\zeta + (a^2 + b^2)t^2\zeta^2. \end{aligned}$$

Wir finden demnach

$$(20) \quad \Delta J = \int_0^1 dt \int_{S_i} (R^2 + 2(aX + bY)t\zeta + (a^2 + b^2)t^2\zeta^2) \zeta \cos \varphi_i d\sigma_i.$$

Es gilt nun

$$(21) \quad \begin{aligned} & -\frac{\omega^2}{f\kappa} \int_0^1 dt \int_{S_i} R^2 \zeta \cos \varphi_i d\sigma_i - 2 \int_0^1 dt \int_{S_i} U \zeta \cos \varphi_i d\sigma_i \\ & = -2 \int_0^1 dt \int_{S_i} \zeta \cos \varphi_i \left(U + \frac{R^2 \omega^2}{2f\kappa} \right) d\sigma_i. \end{aligned}$$

Der Klammerausdruck hat auf der Begrenzung einer jeden Einzelmasse von T einen konstanten Wert. Wird der Rand der j -ten Einzelmasse von T, T_1 und T_i für einen Augenblick entsprechend mit S^j und S_i^j und S_i^j bezeichnet, so findet man für (21) den Wert

$$(22) \quad -\sum_j 2 \left(U + \frac{R^2 \omega^2}{2f\kappa} \right) \int_0^1 dt \int_{S_i^j} \zeta \cos \varphi_i d\sigma_i = -\sum_j 2 \left(U + \frac{R^2 \omega^2}{2f\kappa} \right) \int_{(T_1-T)^j} d\sigma = 0^{50)}$$

Demnach ist

$$(23) \quad \begin{aligned} \Lambda_1 - \Lambda &= -\frac{\omega^2}{f\kappa} \int_0^1 dt \int_{S_i} [2(aX + bY)t\zeta + (a^2 + b^2)t^2\zeta^2] \zeta \cos \varphi_i d\sigma_i \\ &+ \frac{\omega^2}{f\kappa} \frac{(\Delta J)^2}{J} \left(1 - \frac{\Delta J}{J} + \left(\frac{\Delta J}{J}\right)^2 - \dots\right) - 2 \int_0^1 dt \int_{S_i} \zeta \cos \varphi_i [tU^{(1)} + t^2 U^{(2)} + \dots] d\sigma_i \end{aligned}$$

⁵⁰⁾ Mit $(T_1 - T)^j$ ist der von S_i^j und S^j begrenzte schalenförmige Körper zu verstehen. Nach Voraussetzung sind alle Werte $\int d\sigma$ gleich Null.
 $T_1 - T^j$

Betrachten wir die Formel (23). Glieder zweiter Ordnung können nur in den Ausdrücken

$$\int_{S_i} t \zeta \cos \varphi_i U^{(1)} d\sigma_i, \quad -\frac{\omega^2}{f\kappa} \int_0^1 dt \int_{S_i} [2(aX + bY)t\zeta] \zeta \cos \varphi_i d\sigma_i \quad \text{und} \quad \frac{\omega^2}{f\kappa} \frac{(AJ)^2}{J}$$

vorkommen. Es macht keine Schwierigkeiten, diese Glieder explizite hinzuschreiben.

Wir setzen

$$(24) \quad N = \text{Max} \left(|\zeta|, \left| \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right|, \left| \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right| \right),$$

$$(25) \quad \cos \varphi_i d\sigma_i = (aA_i + bB_i + cC_i) d\xi d\eta = \sum a \frac{\partial(Y + bt\zeta, Z + ct\zeta)}{\partial(\xi, \eta)} d\xi d\eta \\ = (1 + E_1 t + E_2 t^2) d\sigma.$$

Nach (34) I ist

$$(26) \quad N \leq \varepsilon.$$

Die Funktionen E_1 und E_2 sind, wie man sich leicht überzeugt, in bezug auf ζ , $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$ von der ersten bzw. zweiten Ordnung. In E_2 gehen übrigens $\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right)^2$, $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$, $\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)^2$ nicht ein.

Es ist zunächst

$$(27) \quad L = -\frac{\omega^2}{f\kappa} \int_0^1 dt \int_{S_i} 2(aX + bY)t\zeta^2 \cos \varphi_i d\sigma_i \\ = -\frac{\omega^2}{f\kappa} \int_0^1 dt \int_S 2(aX + bY)t\zeta^2 d\sigma + L_1,$$

wobei offenbar

$$(28) \quad |L_1| \leq \beta^{(1)} N \int_S \zeta^2 d\sigma \quad (\beta^{(1)} \text{ konstant})$$

gilt. Für (27) können wir einfacher schreiben

$$(29) \quad L = -\frac{\omega^2}{f\kappa} \int_S (aX + bY) \zeta^2 d\sigma + L_1 = -\frac{\omega^2}{f\kappa} \int_S R\tau \zeta^2 d\sigma + L_1.$$

Mit Rücksicht auf (20) und (25) finden wir ferner

$$(30) \quad AJ = \int_S R^2 \zeta d\sigma + L_2, \quad |L_2| \leq \beta^{(2)} N \int_S |\zeta| d\sigma,$$

demnach, wie man leicht sieht,

$$(31) \quad \frac{\omega^2}{\kappa f} \frac{(AJ)^2}{J} = \frac{\omega^2}{f\kappa J} \left(\int_S R^2 \zeta d\sigma \right)^2 + L_3, \quad |L_3| \leq \beta^{(3)} N \left(\int_S |\zeta| d\sigma \right)^2 \leq \beta^{(4)} N \int_S \zeta^2 d\sigma.$$

Endlich finden wir wegen (15)

$$\begin{aligned}
 (32) \quad & -2 \int_0^1 dt \int_{S_i} t \zeta \cos \varphi_i U^{(1)} d\sigma_i \\
 & = -2 \int_0^1 t dt \int_{S_i} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \nu} W(\zeta, \eta, 0) \cos \varphi_i d\sigma_i - 2 \int_0^1 t dt \int_{S_i} \int_{S'} \frac{1}{\varrho} \zeta \cos \varphi_i \zeta' d\sigma_i d\sigma' \\
 & = - \int_S \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \nu} W(\zeta, \eta, 0) d\sigma - \iint_S \frac{1}{\varrho} \zeta \zeta' d\sigma d\sigma' + L_4,
 \end{aligned}$$

$$(33) \quad |L_4| \leq \beta^{(5)} N \int_S \zeta^2 d\sigma + \beta^{(6)} N \iint_S \frac{1}{\varrho} \zeta \zeta' d\sigma d\sigma'.$$

Wegen

$$(34) \quad \zeta \zeta' \leq \frac{1}{2} (\zeta^2 + \zeta'^2)$$

ist

$$\begin{aligned}
 (35) \quad & \iint_S \frac{1}{\varrho} \zeta \zeta' d\sigma d\sigma' \leq \frac{1}{2} \iint_S \frac{1}{\varrho} (\zeta^2 + \zeta'^2) d\sigma d\sigma' = \iint_S \frac{1}{\varrho} \zeta^2 d\sigma d\sigma' \\
 & = \int_S \zeta^2 d\sigma \int_S \frac{d\sigma'}{\varrho} \leq \beta^{(7)} \int_S \zeta^2 d\sigma,
 \end{aligned}$$

mithin

$$(36) \quad |L_4| \leq \beta^{(8)} N \int_S \zeta^2 d\sigma.$$

Für die Glieder zweiter Ordnung erhalten wir demnach mit Rücksicht auf

$$(37) \quad \psi = \frac{\partial}{\partial \nu} W(\zeta, \eta, 0) + \frac{\omega^2}{f_{\kappa}} R \tau$$

zusammenfassend den Ausdruck

$$(38) \quad \boxed{- \int_S \psi \zeta^2 d\sigma - \iint_S \frac{1}{\varrho} \zeta \zeta' d\sigma d\sigma' + \frac{\omega^2}{f_{\kappa} J} \left(\int_S R^2 \zeta d\sigma \right)^2}$$

§ 3.

Abschätzung des Restes.

Es erscheint nun von der größten Wichtigkeit, für die Summe der Glieder dritter und höherer Ordnung in (3) eine geeignete Abschätzung zu gewinnen. Man gelangt zu dieser wie folgt.

Es ist zunächst wegen (36) I und (37) I

$$(39) \quad t^2 U^{(2)} + t^3 U^{(3)} + \dots = U_t - U - t U^{(1)} = \int_0^t d\bar{t} \int_0^{\bar{t}} \frac{\partial^2 U_{t_*}}{\partial t_*^2} dt_*,$$

emnach

$$\begin{aligned}
 (40) \quad K &= -2 \int_0^1 dt \int_{S_t} \zeta \cos \varphi_t [t^3 U^{(2)} + t^3 U^{(3)} + \dots] d\sigma_t \\
 &= -2 \int_0^1 dt \int_{S_t} d\sigma_t \cos \varphi_t \zeta \int_0^t d\bar{t} \int_0^{\bar{t}} \frac{\partial^3 U_{t*}}{\partial t_*^3} dt_* \\
 &= -2 \int_S \zeta d\sigma \int_0^1 dt (1 + E_1 t + E_2 t^2) \int_0^t d\bar{t} \int_0^{\bar{t}} \frac{\partial^3 U_{t*}}{\partial t_*^3} dt_* = K_1 + K_2,
 \end{aligned}$$

$$(41) \quad K_1 = -2 \int_S \zeta d\sigma \int_0^1 dt \int_0^t d\bar{t} \int_0^{\bar{t}} \frac{\partial^3 U_{t*}}{\partial t_*^3} dt_*.$$

Es gilt

$$(42) \quad |K_1| < 2 \int_0^1 dt \int_0^t d\bar{t} \int_0^{\bar{t}} dt_* \left| \int_S \zeta \frac{\partial^3 U_{t*}}{\partial t_*^3} d\sigma \right|.$$

Es handelt sich jetzt darum, $|K_1|$ abzuschätzen.

Wegen (42) I und (25) I ist

$$(43) \quad \int_S \zeta \frac{\partial^3 U_{t*}}{\partial t_*^3} d\sigma = \int_S \int_S d\sigma \sum (a' \zeta' - a \zeta) \frac{\zeta}{\varrho_{t*}} \cdot \varrho_{t*} \frac{\partial}{\partial t_*} \left(\frac{A'_{t*}}{\varrho_{t*}} \right) \frac{d\sigma'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

Die Ausdrücke $\varrho_{t*} \frac{\partial}{\partial t_*} \left(\frac{A'_{t*}}{\varrho_{t*}} \right)$, $\varrho_{t*} \frac{\partial}{\partial t_*} \left(\frac{B'_{t*}}{\varrho_{t*}} \right)$, ..., sind, wie man sich leicht durch Ausrechnen überzeugt, beschränkt und in bezug auf ζ' , $\frac{\partial \zeta'}{\partial \xi'}$, $\frac{\partial \zeta'}{\partial \eta'}$ von der ersten Ordnung (vgl. die Abh. I, S. 246).

Darum ist

$$(44) \quad \left| \int_S \zeta \frac{\partial^3 U_{t*}}{\partial t_*^3} d\sigma \right| \leq \beta^{(9)} N \int_S \int_S d\sigma d\sigma' \left| \sum (a' \zeta' - a \zeta) \frac{\zeta}{\varrho_{t*}} \right|.$$

Bei der Abschätzung des Doppelintegrals rechterhand kommt man auf zwei verschiedene Gruppen von Gliedern, — einmal Doppelintegrale von der Form

$$(45) \quad K_3 = \int_S \int_S |a| \frac{\zeta^2}{\varrho_{t*}} d\sigma d\sigma',$$

dann Doppelintegrale der Gestalt

$$(46) \quad K_4 = \int_S \int_S |a'| \left| \frac{\zeta \zeta'}{\varrho_{t*}} \right| d\sigma d\sigma'.$$

Es gilt nun

$$(47) \quad |K_3| \leq \beta^{(10)} \int_S \zeta^2 d\sigma \int_S \frac{1}{\varrho_{t*}} d\sigma' \leq \beta^{(11)} \int_S \zeta^2 d\sigma$$

und, wie wir schon einmal gesehen haben,

$$(48) \quad |K_4| \leq \beta^{(12)} \int_S \int_S \frac{\zeta \zeta'}{\varrho_{i*}} d\sigma d\sigma' \leq \frac{1}{2} \beta^{(12)} \int_S \int_S \frac{\zeta^2 + \zeta'^2}{\varrho_{i*}} d\sigma d\sigma' \leq \beta^{(13)} \int_S \zeta^2 d\sigma.$$

Demnach ist

$$(49) \quad \left| \int_S \zeta \frac{\partial^2 U_{i*}}{\partial t_*^2} d\sigma \right| \leq \beta^{(14)} N \int_S \zeta^2 d\sigma,$$

mithin wegen (42)

$$(50) \quad |K_1| \leq \beta^{(15)} N \int_S \zeta^2 d\sigma.$$

In einer ganz ähnlichen Weise findet man wegen $|E_1 t + E_2 t^2| \leq \beta^{(16)} N$

$$(51) \quad |K_2| < \beta^{(17)} N \int_S \zeta^2 d\sigma$$

und endlich

$$(52) \quad |K| \leq \beta^{(18)} N \int_S \zeta^2 d\sigma.$$

Betrachten wir ferner den Ausdruck

$$(53) \quad K_5 = \frac{\omega^2}{f\kappa} \frac{(\Delta J)^2}{J} \left(-\frac{\Delta J}{J} + \left(\frac{\Delta J}{J}\right)^2 - \dots \right) = -\frac{\omega^2}{f\kappa} \frac{(\Delta J)^3}{J^2} \left(1 - \left(\frac{\Delta J}{J}\right) + \dots \right) \\ = -\frac{\omega^2}{f\kappa} \frac{(\Delta J)^3}{J^2} \frac{1}{1 + \frac{\Delta J}{J}}.$$

Wegen $\left| \frac{\Delta J}{J} \right| < \frac{1}{2}$ ist

$$(54) \quad |K_5| \leq 2 \frac{\omega^2}{f\kappa} \frac{|\Delta J|^3}{J^2}.$$

Nach (30) ist gewiß

$$(55) \quad |\Delta J| \leq \beta^{(19)} \int_S |\zeta| d\sigma,$$

somit auch

$$(56) \quad |\Delta J| \leq \beta^{(20)} N,$$

demnach

$$(57) \quad |K_5| \leq \beta^{(21)} N \left(\int_S |\zeta| d\sigma \right)^2,$$

oder der Schwarzschen Ungleichheit zufolge

$$(58) \quad |K_5| \leq \beta^{(22)} N \int_S \zeta^2 d\sigma.$$

Alle bisherigen Ergebnisse zusammenfassend, erhalten wir demnach für die Differenz $\Lambda_1 - \Lambda$ den Ausdruck

$$(59) \quad \Lambda_1 - \Lambda = - \int_S \psi \zeta^2 d\sigma - \int_S \int_S \frac{1}{\varrho} \zeta \zeta' d\sigma d\sigma' + \frac{\omega^2}{f \kappa J} \left(\int_S R^2 \zeta d\sigma \right)^2 + K^*,$$

unter K^* die Gesamtheit der Glieder dritter und höherer Ordnung verstanden. Es gilt

$$(60) \quad |K^*| \leq \beta^{(23)} N \int_S \zeta^2 d\sigma.$$

§ 4.

Elimination einer Nebenbedingung.

Es handelt sich jetzt darum, festzustellen, ob $\Lambda_1 - \Lambda \geq 0$ ist, wenn ζ eine beliebige der Beziehung (26) genügende Funktion gesetzt wird, die überdies die Eigenschaft hat, daß die Volumina der Einzelmassen von T und T_1 entsprechend einander gleich sind⁶⁰⁾ und der Schwerpunkt T_1 sich mit dem Schwerpunkt von T deckt.

Um die Betrachtungen möglichst übersichtlich zu gestalten, werden wir jetzt die zuerst genannte Nebenbedingung eliminieren und hernach in dem zweitnächsten Paragraphen das Vorzeichen von $\Lambda_1 - \Lambda$ bei beliebiger Lage des Schwerpunktes von T_1 untersuchen. In dem § 7 wird sodann in einer ganz ähnlichen Weise die Schwerpunktsbedingung eliminiert und es werden die endgültigen Stabilitätskriterien angegeben.

Sei $\dot{u}$ irgendeine nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Funktion, die überdies so beschaffen ist, daß

$$(61) \quad \dot{u}(\sigma^*) = \dot{u}(\sigma_*) = \dot{u}(\sigma),$$

$$\int_{S^j} \dot{u} d\sigma \neq 0, \quad \int_{S^j} \psi \dot{u}^2 d\sigma = -1 \quad (j = 1, \dots, q).$$

Ist T ein Umdrehungskörper um die z -Achse, so soll überdies $\dot{u}$ die Eigenschaft der Rotationssymmetrie um die z -Achse haben. In den Punkten eines Parallelkreises hat also $\dot{u}$ allemal denselben Wert. Wir setzen

$$(62) \quad \dot{u} = \dot{\zeta} + h_j \dot{u} \text{ auf } S^j \quad (h_j \text{ konstant})$$

und bestimmen die Konstanten h_j so, daß

$$(63) \quad \int_{S^j} \dot{\zeta} d\sigma = 0 \quad (j = 1, \dots, q)$$

⁶⁰⁾ Vgl. die Fußnote ⁵⁵⁾.

wird. Aus

$$(64) \quad \int_{(x_1-T)^j} dv = \int_0^1 dt \int_{S_j'} \zeta \cos \varphi_i d\sigma_i = \int_0^1 dt \int_{S_j'} \zeta (1 + E_1 t + E_2 t^2) d\sigma \\ = \int_{S_j'} \zeta d\sigma + \frac{1}{2} \int_{S_j'} E_1 \zeta d\sigma + \frac{1}{8} \int_{S_j'} E_2 \zeta d\sigma = 0$$

folgt wegen (62) und (63)

$$(65) \quad h_j = - \frac{1}{\int_{S_j'} u d\sigma} \left\{ \frac{1}{2} \int_{S_j'} E_1 \zeta d\sigma + \frac{1}{8} \int_{S_j'} E_2 \zeta d\sigma \right\} \equiv H_j \{ \zeta \}.$$

Wegen (24) ist

$$(66) \quad |H_j \{ \zeta \}| < \beta^{(24)} N \int_{S_j'} |\zeta| d\sigma.$$

Aus (62) und (65) folgt

$$(67) \quad \dot{\zeta} = \zeta - u H_j \{ \zeta \} \text{ auf } S_j.$$

Für $H_j(\zeta)$ findet man aus (67), wenn man diese Gleichung durch sukzessive Approximationen (ähnlich wie die Gleichung (9) III) auflöst, einen Integralausdruck über $\dot{\zeta}$ und $D_1 \dot{\zeta}$, der lediglich Glieder zweiten und höheren Grades enthält,

$$(68) \quad H_j \{ \zeta \} = K_j \{ \dot{\zeta} \}.$$

Es gilt

$$(69) \quad |u K_j(\dot{\zeta})| < \beta_0^{(25)} N \int_{S_j'} |\dot{\zeta}| d\sigma^{(25a)} \text{ und wegen (66) auch } |K_j \{ \dot{\zeta} \}| < \beta^{(25)} N^{(25b)}$$

Aus (66), (67) und (24) folgt ferner

$$(70) \quad |\dot{\zeta}|, |D_1 \dot{\zeta}| < \beta^{(26)} N.$$

Sei jetzt $\mathfrak{z}$ irgendeine nebst ihren Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion, die den Beziehungen

$$(71) \quad \mathfrak{N} = \text{Max} \left(|\mathfrak{z}|, \left| \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \xi} \right|, \left| \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \eta} \right| \right) < \hat{\beta} \varepsilon$$

genügt, unter $\hat{\beta}$ eine noch zu bestimmende Konstante ≤ 1 verstanden. Die Funktion

$$(72) \quad \dot{\zeta} = \mathfrak{z} - u \frac{\int_{S_j'} \mathfrak{z} d\sigma}{\int_{S_j'} u d\sigma} \text{ auf } S_j' \quad (j = 1, \dots, q)$$

ist so beschaffen, daß

$$(73) \quad \int_{S_j'} \dot{\zeta} d\sigma = 0 \quad (j = 1, \dots, q)$$

gilt. Umgekehrt läßt sich, wie man leicht sieht, jede Funktion $\dot{\zeta}$, die

^(25a) Die Gleichung (67) kann man wegen (65) in der Form (67*) $\dot{\zeta}(\sigma) = \zeta(\sigma) + \int_{S_j'} \mathfrak{K}(\sigma, \bar{\sigma}) \zeta(\bar{\sigma}) d\bar{\sigma}$ darstellen. Es gilt $|\mathfrak{K}(\sigma, \bar{\sigma})| < \beta^* N$. Die Integralgleichung (67*) ist für hinreichend kleine N gewiß eindeutig auflösbar; es gilt $\zeta(\sigma) = \dot{\zeta}(\sigma) - \int_{S_j'} \mathfrak{K}(\sigma, \bar{\sigma}) \zeta(\bar{\sigma}) d\bar{\sigma}$, $|\mathfrak{K}(\sigma, \bar{\sigma})| < \beta_* N$ w. z. b. w.

Bedingungen (73) genügt, in der Form (72) darstellen. Man setze, unter l_j willkürliche Konstanten verstanden,

$$(74) \quad \zeta = \zeta + l_j \dot{u} \text{ auf } S^j.$$

Aus (74) und (67) folgt

$$(75) \quad \zeta = \zeta + l_j \dot{u} - \dot{u} H_j \{\zeta\} \text{ auf } S^j.$$

Wir bestimmen die in (75) noch willkürlichen Konstanten l_j durch die Forderung, daß

$$(76) \quad \int_{S^j} \psi \zeta \dot{u} d\sigma = 0 \quad (j = 1, \dots, q)$$

wird.

Aus (62), (72), (65) und (68) folgt jetzt umgekehrt

$$(77) \quad \zeta = \zeta - \dot{u} \int_{S^j} \zeta d\sigma \cdot \frac{1}{\int_{S^j} \dot{u} d\sigma} + \dot{u} L_j \{\zeta\} \text{ auf } S^j.$$

Hier ist $L_j \{\zeta\}$ ein Integralausdruck über ζ und $D_1 \zeta$, der nur Glieder zweiten und höheren Grades enthält. Es gilt wegen (69), (72) und (71)

$$(78) \quad |\dot{u} L_j \{\zeta\}| < \beta_0^{(27)} N \int_S |\zeta| d\sigma, \text{ mithin auch } |\dot{u} L_j \{\zeta\}| < \beta^{(27)} N \mathfrak{N},$$

darum

$$(79) \quad |\zeta|, |D_1 \zeta| < \beta^{(28)} \mathfrak{N},$$

omit

$$(80) \quad N < \beta^{(28)} \mathfrak{N}.$$

Wir wählen jetzt $\hat{\beta}$ gleich der kleineren der beiden Zahlen 1 und $\frac{1}{\beta^{(28)}}$. Aus (80) und (71) ergibt sich, wie es sein soll,

$$(81) \quad N < \varepsilon.$$

Jetzt ist der Ausdruck

$$(82) \quad \zeta - \dot{u} \int_{S^j} \zeta d\sigma \frac{1}{\int_{S^j} \dot{u} d\sigma} + \dot{u} L_j \{\zeta\} = \zeta - a_j \dot{u} \int_{S^j} \zeta d\sigma + \dot{u} L_j \{\zeta\} \text{ auf } S^j \quad (j = 1, \dots, q)$$

für ζ in $\Lambda_1 - \Lambda$ einzusetzen. Die Rechnung ist etwas umständlich, bietet jedoch an sich keine Schwierigkeiten dar. Wir wollen das Resultat nur für den besonders einfachen Fall einer einzigen zusammenhängenden Flüssigkeitsmasse ($q = 1$) wiedergeben. Es gilt dann

$$(83) \quad \begin{aligned} \Lambda_1 - \Lambda = & - \int_S \psi \zeta^2 d\sigma - \iint_{S S} \frac{1}{\varrho} \zeta \zeta' d\sigma d\sigma' + 2a \iint_{S S} \psi \dot{u} \zeta \zeta' d\sigma d\sigma' \\ & + 2a \iint_{S S} f(\sigma) \zeta \zeta' d\sigma d\sigma' - a^2 \iint_{S S} \frac{1}{\varrho} \dot{u} \dot{u}' d\sigma d\sigma' \iint_{S S} \zeta \zeta' d\sigma d\sigma' \\ & + a^2 \left(\int_S \zeta d\sigma \right)^2 + \frac{\omega^2}{f_{\infty} J} \left(\int_S (R^2 - b) \zeta d\sigma \right)^2 + \mathfrak{R}^*, \end{aligned}$$

$$(84) \quad |\mathfrak{R}^*| \leq \beta^{(20)} \mathfrak{N} \int_S \mathfrak{z}^2 d\sigma,$$

$$(85) \quad \mathfrak{a} = \frac{1}{\int_S \dot{u} d\sigma}, \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \int_S R^2 \dot{u} d\sigma, \quad \mathfrak{f}(\sigma) = \int_S \frac{1}{\varrho} \dot{u}' d\sigma'.$$

§ 5.

Untersuchung einer Integralgleichung.

Betrachten wir jetzt die Integralgleichung mit symmetrischem Kern

$$(86) \quad \psi \mathfrak{z} + \mu \int_S \left(\frac{1}{\varrho} + Q \right) \mathfrak{z}' d\sigma' = 0,$$

$$(87) \quad Q = -\mathfrak{a}(\psi' \dot{u}' + \psi \dot{u}) - \mathfrak{a}(\mathfrak{f}(\sigma') + \mathfrak{f}(\sigma)) \\ + \mathfrak{a}^2 \int_S \int_S \frac{1}{\varrho} \dot{u} \dot{u}' d\sigma d\sigma' - \mathfrak{a}^2 - \frac{\omega^2}{f^2 J} (R^2 - \mathfrak{b})(R'^2 - \mathfrak{b}).$$

Die Formel (83) läßt sich offenbar in der Form

$$(88) \quad \Lambda_1 - \Lambda = - \int_S \psi \mathfrak{z}^2 d\sigma - \int_S \int_S \left(\frac{1}{\varrho} + Q \right) \mathfrak{z} \mathfrak{z}' d\sigma d\sigma' + \mathfrak{R}^*$$

darstellen.

Sei v_j ($j \geq 0$) ein vollständiges orthogonales System der zu (86) gehörigen, den Beziehungen

$$\int_S \psi v_j v_k d\sigma = 0 \quad (j \neq k), \quad \int_S \psi v_j^2 d\sigma = -1$$

gemäß normierten Eigenfunktionen. Es seien $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots$ die der Größe nach geordneten positiven, $\mu_{-1} \geq \mu_{-2} \geq \dots$ die negativen Eigenwerte. Wie im Kapitel II § 1 läßt sich zeigen, daß man die Funktionen v_j so wählen kann, daß sie bei dem Übergang von σ zu σ^* oder σ_* entweder ungeändert bleiben oder ihr Vorzeichen wechseln. Jede Lösung der Integralgleichung (43) II, die beim Übergang von σ zu σ^* oder σ_* ihr Vorzeichen wechselt, ist, wie man leicht sieht, eine zu demselben Eigenwert gehörige Eigenfunktion der Integralgleichung (86). Insbesondere gilt dies für die Funktionen $u_1 = \text{Const. } c$ und $u_2 = \text{Const. } R \cos p$, und zwar gehören diese Lösungen zu dem Werte 1 des Parameters μ . Ist T ein Rotationskörper um die z -Achse, so sind alle Eigenfunktionen der Gleichung (86) von der Form $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{z})$, $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{z}) \cos k\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{z}) \sin k\mathfrak{b}$; jedes Paar von Eigenfunktionen der Gleichung (43) II von der Form $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{z}) \cos k\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{z}) \sin k\mathfrak{b}$ gehört auch zu (86) und umgekehrt.

Die Integralgleichung

$$(90) \quad \psi \mathfrak{z} + \int_S \left(\frac{1}{\varrho} + Q \right) \mathfrak{z}' d\sigma' = 0$$

hat, wie man durch Einsetzen leicht verifiziert, außer u_1 und u_2 die weitere triviale Nulllösung $\dot{u}$.

Nehmen wir jetzt an, daß die Integralgleichung

$$(91) \quad \psi \mathfrak{z} + \int_S \frac{1}{\varrho} \mathfrak{z}' d\sigma' = 0$$

eine nicht triviale Lösung u_3 hat, die so beschaffen ist, daß

$$(92) \quad \int_S R^2 u_3 d\sigma = 0$$

gilt. Bekanntlich ist auch

$$(93) \quad \int_S u_3 d\sigma = 0. \quad (91)$$

Man überzeugt sich jetzt leicht durch direktes Einsetzen, daß u_3 zugleich eine Nulllösung der Integralgleichung

$$(94) \quad \psi \mathfrak{z} + \int_S \left(\frac{1}{\varrho} + Q \right) \mathfrak{z}' d\sigma' = 0$$

ist.

Die Formel (91) vereinfacht sich, wenn man bezüglich $\dot{u}$ eine geeignete spezielle Annahme trifft. Wie wir im zweiten Kapitel § 4 gezeigt haben, gibt es stets mindestens eine Eigenfunktion $\dot{u}$ der Integralgleichung (14) II, die in bezug auf die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ symmetrisch und überdies so beschaffen ist, daß $\int_S \dot{u} d\sigma \neq 0$ ausfällt. Sei $\dot{v}$ der zu $\dot{u}$ gehörige Eigenwert. Setzt man $\dot{u} = \dot{u}$, so findet man

$$(95) \quad \int_S \psi \dot{u}^2 d\sigma = -1, \quad \mathfrak{f}(\sigma) = \int_S \frac{1}{\varrho} \dot{u}' d\sigma' = -\frac{1}{\dot{v}} \psi' \dot{u},$$

$$\mathfrak{b} = \int_S R^2 \dot{u} d\sigma \cdot \frac{1}{\int_S \dot{u}^2 d\sigma},$$

$$(96) \quad \mathfrak{a} = \frac{1}{\int_S \dot{u} d\sigma}, \quad \int_S \int_S \frac{1}{\varrho} \dot{u} \dot{u}' d\sigma d\sigma' = \frac{1}{\dot{v}},$$

$$(97) \quad Q = \mathfrak{a} \left(\frac{1}{\dot{v}} - 1 \right) (\psi \dot{u} + \psi' \dot{u}' + \mathfrak{a}) - \frac{\omega^2}{f z J} (R^2 - \mathfrak{b})(R'^2 - \mathfrak{b}).$$

(91) Man vergleiche die Betrachtungen des § 5 des dritten Kapitels.

§ 6.

**Vorzeichen von $\Lambda_1 - \Lambda$ bei beliebiger Lage des Schwerpunktes von T_1 .
Der Hauptfall.**

1. Wir nehmen zunächst an, daß die Integralgleichung (90), falls T ein Rotationskörper um die z -Achse ist, keine Nulllösungen von der Form $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{z}) \cos k\mathfrak{d}$, $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{z}) \sin k\mathfrak{d}$ hat. Hingegen werden über die Anzahl der nicht trivialen Nulllösungen keine einschränkenden Voraussetzungen gemacht.

Es sei T_1 irgendeine Flüssigkeitsmasse in der Nachbarschaft von T . Alle Figuren, die man aus T_1 durch eine Verschiebung in der Richtung der z -Achse oder eine Drehung um die z -Achse erhält, ergeben denselben Wert von Λ_1 . Es steht darum, wie sich leicht zeigen läßt, nichts im Wege, T_1 so zu orientieren, daß

$$(98) \quad \int_S \psi u_1 \zeta d\sigma = 0, \quad \int_S \psi u_3 \zeta d\sigma = 0$$

gilt ⁶²⁾ ⁶³⁾. Wegen

$$(99) \quad \int_S \psi u_1 \dot{u} d\sigma = 0, \quad \int_S \psi u_3 \dot{u} d\sigma = 0$$

sowie (75) und (76) ist

$$(100) \quad \int_S \psi u_1 \mathfrak{z} d\sigma = 0, \quad \int_S \psi u_2 \mathfrak{z} d\sigma = 0, \quad \int_S \psi \dot{u} \mathfrak{z} d\sigma = 0.$$

Es sei zur Abkürzung

$$(101) \quad x_j = \int_S \psi \mathfrak{z} v_j d\sigma$$

gesetzt. Das Orthogonalsystem v_j ist im allgemeinen nicht notwendig abgeschlossen; es seien w_j ($j = 1, 2, \dots$) die Funktionen, die es zu einem abgeschlossenen System ergänzen. Wir setzen

$$(102) \quad \int_S \psi w_j \mathfrak{z} d\sigma = y_j.$$

Es gilt

$$(103) \quad - \int_S \psi \mathfrak{z}^2 d\sigma = \sum' x_j^2 + \sum y_j^2.$$

Durch das Zeichen $\sum'$ soll angedeutet werden, daß die Nulllösungen u_1 , u_3 und $\dot{u}$ außer Betracht bleiben.

⁶²⁾ Vgl. die analoge Betrachtung in der Abh. I, S. 251.

⁶³⁾ Es sei noch einmal daran erinnert, daß $u_2 \equiv 0$ gesetzt wird, wenn T ein Rotationskörper um die z -Achse ist.

Wie im Kapitel II § 2 erhält man, wenn $\mathfrak{z}$ etwa auf S analytisch und regulär ist,

$$(104) \quad \frac{1}{\eta'} \int_S \mathfrak{z}' \left\{ \frac{1}{\varrho} + Q \right\} d\sigma' = \sum' \frac{v^{(n)}}{\mu_n} \int_S \psi' \mathfrak{z}' v^{(n)'} d\sigma'$$

und darum

$$(105) \quad \iint_{SS} \mathfrak{z} \mathfrak{z}' \left\{ \frac{1}{\varrho} + Q \right\} d\sigma d\sigma' = \sum' \frac{x_j^2}{\mu_j}.$$

Diese Formel gilt, wie sich unter Hinzuziehung des Weierstraßschen Approximationssatzes beweisen läßt, für beliebige auf S stetige $\mathfrak{z}$ ⁶⁴⁾.

Wegen (88), (103) und (105) ist demnach

$$(106) \quad \Lambda_1 - \Lambda = \sum' \left(1 - \frac{1}{\mu_j} \right) x_j^2 + \sum y_j^2 + \mathfrak{R}^*,$$

$$|\mathfrak{R}^*| < -\beta^{(30)} \mathfrak{N} \int_S \psi \mathfrak{z}^2 d\sigma.$$

1. Es möge der kleinste positive Eigenwert der Integralgleichung (86) kleiner als 1 sein,

$$(107) \quad \mu_1 < 1. \text{ ^{64a)} }$$

Wir nehmen $\mathfrak{z} = x_1 v_1$ an und erhalten

$$(108) \quad \Lambda_1 - \Lambda = \left(1 - \frac{1}{\mu_1} \right) x_1^2 + \mathfrak{R}^*,$$

$$(109) \quad |\mathfrak{R}^*| < \beta^{(30)} \mathfrak{N} x_1^2.$$

Für alle hinreichend kleinen $\mathfrak{N}$, d. h. hinreichend kleinen $|x_1|$, ist offenbar

$$(110) \quad |\Lambda_1 - \Lambda| < 0.$$

Aus (110) folgt die für das Eintreten eines Minimums notwendige Bedingung:

Der kleinste positive Eigenwert μ_1 der Integralgleichung muß mindestens gleich 1 sein.

2. Es sei zunächst $\mu_1 > 1$.

Aus (107) folgt, wie man sich leicht überzeugt,

$$(111) \quad \Lambda_1 - \Lambda \geq \left(1 - \frac{1}{\mu_1} \right) \left(\sum' x_j^2 + \sum y_j^2 \right) - |\mathfrak{R}^*|$$

$$\geq - \left(1 - \frac{1}{\mu_1} \right) \int_S \psi \mathfrak{z}^2 d\sigma \left(1 - \beta^{(30)} \mathfrak{N} \right).$$

⁶⁴⁾ Der Beweis wäre wie in meiner Arbeit, „Zur Analysis der unendlich vielen Variablen. Zweite Abhandlung“, diese Zeitschrift 3 (1919), S. 127–160 (S. 132–136) zu führen.

^{64a)} Die trivialen Nulllösungen u_1, u_2, u bleiben jetzt außer Betracht.

In (111) wird $\Re$ so klein gewählt, daß

$$1 - \beta^{(30)} \Re > 0.$$

gilt. Offenbar ist jetzt

$$(112) \quad \Lambda_1 - \Lambda \geq 0,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für $\beta \equiv 0$ gilt. *Es liegt ein Minimum vor*⁶⁵⁾.

Es sei zweitens $\mu_1 = 1$ ^{64a)}. Die zweite Variation, d. h. die Gesamtheit der quadratischen Glieder, verschwindet für $\beta = x_1 v_1$, unter v_1 irgendeine nicht triviale Nulllösung der Integralgleichung (86) für $\mu_1 = 1$ verstanden. Das Vorzeichen von $\Lambda_1 - \Lambda$ hängt von den Gliedern höherer Ordnung ab. Wir kommen auf diesen Gegenstand weiter unten noch einmal zurück.

Es ist nicht schwer zu zeigen, daß μ_1 größer, gleich oder kleiner als 1 ausfällt, ganz gleich wie die Hilfsfunktion $\dot{u}$ gewählt ist.

Es sei $\underline{u}$ eine andere Hilfsfunktion; wie vorhin ist

$$(113) \quad \int_S \underline{u} d\sigma \neq 0, \quad \int_S \psi \underline{u}^2 d\sigma = -1.$$

Der kleinste positive Eigenwert der zu (86) analogen Integralgleichung heiße jetzt $\underline{\mu}_1$. Offenbar kann nicht zugleich $\underline{\mu}_1 < 1$, $\underline{\mu}_1 > 1$ oder $\underline{\mu}_1 > 1$, $\underline{\mu}_1 < 1$ sein^{64a)}, da z. B. aus $\underline{\mu}_1 > 1$ die Ungleichheit $\Lambda_1 - \Lambda \geq 0$, aus $\underline{\mu}_1 < 1$ indessen die Möglichkeit von $\Lambda_1 - \Lambda < 0$ folgen würde. Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß nicht zugleich etwa $\underline{\mu}_1 > 1$, $\mu_1 = 1$ oder $\underline{\mu}_1 < 1$, $\mu_1 = 1$ ^{64a)} sein kann.

Sei etwa $\mu_1 = 1$, und es sei v^0 eine nicht triviale Nulllösung der Integralgleichung (86) (für $\mu = 1$). Setzt man $\beta = v^0$, so erhält man für $\Lambda_1 - \Lambda$ einen Ausdruck dritten oder höheren Grades in bezug auf β und $D_1 \beta$. Sei ζ^0 der nach (77) zu v^0 gehörige Wert von ζ . Wegen (75) und (76) ist $\Lambda_1 - \Lambda$ auch in bezug auf ζ^0 und $D_1 \zeta^0$ vom dritten oder höheren Grade. Zu ζ^0 gehört im System $\dot{u}$ eine Funktion $\underline{\beta}$. Wie man leicht sieht, ist $\Lambda_1 - \Lambda$ auch in bezug auf $\underline{\beta}$ und $D_1 \underline{\beta}$ vom dritten oder höheren Grade. Dies kann aber, da $\underline{\mu}_1 > 1$ ist, wegen

$$(114) \quad \int_S \psi u_1 \underline{\beta} d\sigma = 0, \quad \int_S \psi u_2 \underline{\beta} d\sigma = 0, \quad \int_S \psi \underline{u} \underline{\beta} d\sigma = 0$$

nur eintreten, wenn $\underline{\beta}$ identisch verschwindet. Dann wäre aber auch $\zeta^0 \equiv 0$ und $v^0 \equiv 0$.

In ähnlicher Weise läßt sich zeigen, daß nicht $\underline{\mu}_1 < 1$ und zugleich $\mu_1 = 1$ sein kann.

⁶⁵⁾ Der ganzen Problemstellung entsprechend, handelt es sich hier um ein schwaches Minimum.

2. Es möge jetzt T ein Rotationskörper sein, und es möge die Integralgleichung (1) II außer der trivialen Nulllösung u_1 nur noch ein Paar von Nulllösungen $u_3 = \mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \cos k\mathfrak{b}$, $u_4 = \mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \sin k\mathfrak{b}$ haben. Wie wir wissen, sind u_3 und u_4 zugleich Nulllösungen der Integralgleichung (90). Durch eine geeignete Verschiebung der Vergleichsfigur parallel zur z -Achse, verbunden mit einer passenden Drehung um diese Achse, läßt sich erreichen, daß

$$(98^*) \quad \int_S \psi u_1 \zeta d\sigma = 0, \quad \int_S \psi u_4 \zeta d\sigma = \int_S \psi \zeta \mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \sin k\mathfrak{b} d\sigma = 0$$

wird (vgl. die Ausführungen in § 4 des dritten Kapitels). Wegen

$$(99^*) \quad \int_S \psi u_1 \dot{u} d\sigma = 0, \quad \int_S \psi u_4 \dot{u} d\sigma = 0$$

sowie wegen (98*), (75) und (76) ist

$$(100^*) \quad \int_S \psi u_1 \mathfrak{z} d\sigma = 0, \quad \int_S \psi \dot{u} \mathfrak{z} d\sigma = 0, \quad \int_S \psi u_4 \mathfrak{z} d\sigma = 0.$$

Die Diskussion verläuft jetzt ähnlich wie vorhin, wobei diesmal die Eigenfunktionen u_1 , $\dot{u}$ und $u_4 = \mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \sin k\mathfrak{b}$ außer Betracht bleiben. Ist der kleinste positive Eigenwert $\mu_1 < 1$, so liegt ein Minimum gewiß nicht vor. Ist aber $\mu_1 = 1$, so müssen Glieder höherer Ordnung herangezogen werden.

§ 7.

Stabilitätskriterien. Bedingte Stabilität.

1. Wir haben bei der Untersuchung des Vorzeichens von $\Lambda_1 - \Lambda$ vorausgesetzt, daß die Volumina zusammengehöriger Einzelmassen von T und T_1 einander gleich sind. Jetzt soll darüber hinaus angenommen werden, daß die Schwerpunkte von T und T_1 zusammenfallen. Da bei einer Verschiebung von T_1 parallel zu der z -Achse Λ_1 unverändert bleibt, so genügt es anzunehmen, daß der Schwerpunkt von T_1 auf der z -Achse liegt. Das statische Moment des Körpers $T_1 - T$ in bezug auf die Ebenen $x=0$ und $y=0$ muß demnach gleich Null sein. Wie man ohne Schwierigkeiten sieht, drückt sich diese Bedingung durch die Formeln

$$(115) \quad \int_0^1 dt \int_{S_t} x \zeta \cos \varphi_t d\sigma_t = 0,$$

$$(116) \quad \int_0^1 dt \int_{S_t} y \zeta \cos \varphi_t d\sigma_t = 0$$

aus. Wird der von der Normale (ν) mit der x -Achse bzw. y -Achse eingeschlossene Winkel mit (ν, x) bzw. (ν, y) bezeichnet, so läßt sich für (115) auch setzen

$$(117) \quad \int_0^1 dt \int_S \zeta (X + \zeta t \cos(\nu, x)) (1 + E_1 t + E_2 t^2) d\sigma = 0,$$

oder auch

$$(118) \quad \int_S X \zeta d\sigma + \dots = 0,$$

wo die nicht hingeschriebenen Glieder von zweiter oder höherer Ordnung in bezug auf ζ und $D_1 \zeta$ sind.

Für (116) kann man in ähnlicher Weise schreiben

$$(119) \quad \int_S Y \zeta d\sigma + \dots = 0.$$

Wie vorhin die Voraussetzung der Invariabilität der Volumina, so wollen wir jetzt die neuen zusätzlichen Bedingungen (118) und (119) eliminieren.

Wir beginnen damit, daß wir die in § 4 eingeführte Funktion $\dot{u}$ der zusätzlichen Bedingung

$$(120) \quad \int_{S_j} \dot{u} X d\sigma = 0 \quad (j = 1, \dots, q)$$

unterwerfen. Da $\dot{u}(\sigma^*) = \dot{u}(\sigma)$ ist, so ist ferner

$$(121) \quad \int_{S_j} \dot{u} Y d\sigma = 0. \quad (j = 1, \dots, q)$$

Es sei $\bar{f}_1$ und $\bar{f}_2$ irgendein Paar auf S erklärter nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter stetiger Funktionen, die folgende Eigenschaften haben:

1. Es gilt

$$(122) \quad \begin{aligned} \bar{f}_1(\sigma_*) &= \bar{f}_1(\sigma), \quad \bar{f}_2(\sigma_*) = \bar{f}_2(\sigma), \quad \int_S \bar{f}_1 X d\sigma \neq 0, \\ \bar{f}_1(\sigma^*) &= \bar{f}_1(\sigma), \quad \bar{f}_2(\sigma^*) = -\bar{f}_2(\sigma), \quad \int_S \bar{f}_2 Y d\sigma \neq 0. \end{aligned}$$

Offenbar ist darum

$$(123) \quad \begin{aligned} \int_{S'} \bar{f}_2 d\sigma &= 0, \quad \int_{S'} \psi \bar{f}_2 \dot{u} d\sigma = 0 \quad (j = 1, \dots, q), \quad \int_S \bar{f}_2 X d\sigma = 0, \\ \int_S \psi \bar{f}_1 \bar{f}_2 d\sigma &= 0, \quad \int_S \psi \bar{f}_1 u_1 d\sigma = 0, \quad \int_S \psi \bar{f}_1 u_2 d\sigma = 0, \quad \int_S \psi \bar{f}_2 u_1 d\sigma = 0. \end{aligned}$$

2. Es gilt

$$(124) \quad \begin{aligned} \int_{S'} \bar{f}_1 d\sigma &= 0, \quad \int_{S'} \psi \bar{f}_1 \dot{u} d\sigma = 0 \quad (j = 1, \dots, q), \quad \int_S \bar{f}_1 Y d\sigma = 0, \\ \int_S \psi \bar{f}_2 u_2 d\sigma &= 0, \quad \int_S \psi \bar{f}_1^2 d\sigma = -1, \quad \int_S \psi \bar{f}_2^2 d\sigma = -1. \end{aligned}$$

Hat T , wie im Falle der Flüssigkeitsellipsoide, auch die Ebene $x = 0$ zu einer Symmetrieebene, so kann man einfach

$$25) \quad \bar{f}_1 = \frac{X}{\psi} \frac{1}{\sqrt{\int_S -\frac{1}{\psi} X^2 d\sigma}}, \quad \bar{f}_2 = \frac{Y}{\psi} \frac{1}{\sqrt{\int_S -\frac{1}{\psi} Y^2 d\sigma}}$$

zen. Diese Wahl ist insbesondere zulässig, wenn T ein Rotationskörper ist. Für $\dot{u}$ kann man in diesen Fällen die am Schluß des § 4 des zweiten Kapitels mit $\dot{u}$ bezeichnete Funktion einführen.

Sei $\mathfrak{z}$ irgendeine auf S erklärte nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion, die einer zu (71) analogen Ungleichheit genügt. Die Funktion

$$26) \quad \dot{\zeta} = \mathfrak{z} - \dot{u} \int_{S^j} \mathfrak{z} d\sigma \frac{1}{\int_{S^j} \dot{u} d\sigma} - \bar{f}_1 \int_S \mathfrak{z} X d\sigma \frac{1}{\int_S \bar{f}_1 X d\sigma} - \bar{f}_2 \int_S \mathfrak{z} Y d\sigma \frac{1}{\int_S \bar{f}_2 Y d\sigma} \text{ auf } S$$

genügt, wie man sofort sieht, den Beziehungen

$$27) \quad \int_S \dot{\zeta} X d\sigma = 0, \quad \int_S \dot{\zeta} Y d\sigma = 0, \quad \int_{S^j} \dot{\zeta} d\sigma = 0 \quad (j = 1, \dots, q).$$

Wie in § 4 läßt sich zeigen, daß man von $\dot{\zeta}$ ausgehend zu einer Funktion

$$28) \quad \zeta = \mathfrak{z} - \dot{u} \int_{S^j} \mathfrak{z} d\sigma \frac{1}{\int_{S^j} \dot{u} d\sigma} - \bar{f}_1 \int_S \mathfrak{z} X d\sigma \frac{1}{\int_S \bar{f}_1 X d\sigma} - \bar{f}_2 \int_S \mathfrak{z} Y d\sigma \frac{1}{\int_S \bar{f}_2 Y d\sigma} + \\ + \dot{u} L_j \{\mathfrak{z}\} + \bar{f}_1 L_{\bar{f}_1} \{\mathfrak{z}\} + \bar{f}_2 L_{\bar{f}_2} \{\mathfrak{z}\} \text{ auf } S^j$$

erlangt, die folgende Eigenschaften hat⁶⁶⁾:

1. Die Volumina zusammengehöriger Einzelmassen von T und T_1 sind voneinander gleich.

2. Der Schwerpunkt des Körpers T_1 liegt auf der z -Achse.

Umgekehrt gehört zu jeder diese Bedingungen erfüllenden Funktion ζ eine Schar von Funktionen $\mathfrak{z}$ der Form

$$29) \quad \mathfrak{z} = \zeta + l_j \dot{u} + l_1 \bar{f}_1 + l_2 \bar{f}_2 - \dot{u} H_j \{\zeta\} - \bar{f}_1 \mathfrak{H}_1 \{\zeta\} - \bar{f}_2 \mathfrak{H}_2 \{\zeta\} \text{ auf } S^j.$$

Wir bestimmen die in (129) noch willkürlichen Konstanten l_j, l_1, l_2 durch die Forderung, daß

$$30) \quad \int_S \psi \mathfrak{z} \bar{f}_1 d\sigma = 0, \quad \int_S \psi \mathfrak{z} \bar{f}_2 d\sigma = 0, \quad \int_{S^j} \psi \mathfrak{z} \dot{u} d\sigma = 0 \quad (j = 1, \dots, q)$$

erfüllt sein soll.

Jetzt wird ähnlich wie in § 4 in (59) für ζ der Ausdruck (128) eingesetzt. Man wird dabei auf eine Integralgleichung geführt, die (für $q = 1$) (86) analog ist. Ist T insbesondere ein Rotationskörper um die

⁶⁶⁾ In (128) bezeichnen $L_j \{\mathfrak{z}\}$, $L_{\bar{f}_1} \{\mathfrak{z}\}$, $L_{\bar{f}_2} \{\mathfrak{z}\}$ gewisse Integraalausdrücke über $D_1 \mathfrak{z}$, die nur Glieder zweiten und höheren Grades enthalten.

z -Achse, so sind alle Eigenfunktionen von (43) II von der Form $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \cos kb$, $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \sin kb$ zugleich Eigenfunktionen dieser Integralgleichung und umgekehrt. Sie hat für den Wert 1 des Parameters ($q = 1$) die trivialen Nulllösungen u_1 , u_3 , $\dot{u}$, f_1 und f_2 .

Jede Nulllösung $\bar{u}$ der Integralgleichung (1) II, die den Bedingungen

$$(130^*) \quad \int_s \bar{u} d\sigma = 0, \quad \int_s X \bar{u} d\sigma = 0, \quad \int_s Y \bar{u} d\sigma = 0, \quad \int_s R^2 \bar{u} d\sigma = 0$$

genügt, ist zugleich eine zu dem Eigenwerte 1 gehörige Nulllösung der soeben erwähnten Integralgleichung.

Aus (98) ergibt sich wegen (123) und (124)

$$(131) \quad \int_s \psi u_1 \mathfrak{s} d\sigma = 0, \quad \int_s \psi u_3 \mathfrak{s} d\sigma = 0.$$

Es möge zunächst, falls T ein Rotationskörper um die z -Achse ist, die Integralgleichung (1) II keine Nulllösungen von der Form $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \cos kb$, $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \sin kb$ haben. Aus (130) und (131) folgt, daß bei der Reihenentwicklung der quadratischen Glieder von $\Lambda_1 - \Lambda$ die trivialen Nulllösungen außer Betracht bleiben.

Es möge jetzt zweitens T ein Rotationskörper um die z -Achse sein und es möge die zu (90) analoge charakteristische Integralgleichung ein Paar nicht trivialer Nulllösungen haben. Diese seien von der Form $u_3 = \mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \cos kb$, $u_4 = \mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \sin kb$.

Wie am Schluß des vorhergehenden Paragraphen überzeugt man sich, daß bei der Bestimmung des kleinsten positiven Eigenwertes diesmal die Nulllösungen u_1 , $\dot{u}$, u_4 , f_1 , f_2 außer Betracht bleiben.

Sei wieder μ_1 der kleinste positive Eigenwert der soeben erwähnten Integralgleichung⁶⁷). Ist $\mu_1 > 1$, so liegt ein Minimum vor. Ist $\mu_1 < 1$, so tritt gewiß kein Minimum ein. Der Fall $\mu_1 = 1$ bleibt zunächst noch unentschieden.

In einer ganz ähnlichen Weise ist zu verfahren, wenn es sich um Fragen der „bedingten Stabilität“ handelt, d. h. wenn die Vergleichsfigur T_1 außer den bereits betrachteten noch weiteren Integralbeziehungen von der Form

$$(132) \quad \int_s \chi \zeta d\sigma + \dots = 0$$

zu genügen hat. Die nicht hingeschriebenen Glieder sind in bezug auf u und $D_1 \zeta$ vom zweiten oder höheren Grade.

2. Es möge sich jetzt wieder um den Fall unbedingter Stabilität handeln und es sei $\mu_1 \neq 1$.

⁶⁷) Die trivialen Nulllösungen u_1 , u_3 , $\dot{u}$, f_1 , f_2 bzw. u_1 , $\dot{u}$, u_4 , f_1 , f_2 bleiben hier wie bereits erwähnt, außer Betracht.

Dies besagt, daß, wenn $\mu_1 > 1$ ist, die Integralgleichung (1) II nur triviale Nulllösungen hat. Ist $\mu_1 < 1$, so kann (1) II darüber hinaus noch weitere Nulllösungen haben. Die Figur T gehört im ersteren Falle gewiß zu einer (und nur einer) linearen Reihe reeller Gleichgewichtsfiguren an. Dies ist bei der an zweiter Stelle betrachteten Möglichkeit nicht notwendig der Fall. Wir nehmen indessen an, daß auch dann T einer oder mehreren linearen Reihen angehört.

Sei $\hat{T}$ eine Gleichgewichtsfigur in der Nachbarschaft von T . Ihre Gleichungen lassen sich in der Form

$$(33) \quad \hat{X} = \hat{X}(\xi, \eta), \quad \hat{Y} = \hat{Y}(\xi, \eta), \quad \hat{Z} = \hat{Z}(\xi, \eta),$$

darstellen. Den Ausführungen des dritten Kapitels gemäß konvergieren $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$ nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung gleichmäßig gegen X, Y, Z und ihre partiellen Ableitungen. Versieht man die zu $\hat{T}$ gehörigen Größen mit dem Zeichen $\wedge$, so ist gleichmäßig

$$(34) \quad \hat{S} \rightarrow S, \quad \hat{\psi} \rightarrow \psi, \quad \hat{\varrho} \rightarrow \varrho,$$

demnach, wie sich ohne wesentliche Schwierigkeiten zeigen läßt,

$$(35) \quad \hat{\mu}_1 \rightarrow \mu_1.$$

In hinreichender Nähe von T ist demnach $\hat{\mu}_1 > 1$ oder $\hat{\mu}_1 < 1$. Der Stabilitätscharakter der Nachbarfiguren ist derselbe wie der Figur T .

Eine Änderung des Stabilitätscharakters kann also nur dort eintreten, wo $\mu_1 = 1$ ist.

§ 8.

Stabilitätskriterien bei Vorhandensein eines Außenfeldes.

Die Ergebnisse dieses Kapitels lassen sich ohne Schwierigkeiten auf den Fall ausdehnen, daß auf die Flüssigkeit neben den bisher allein betrachteten Anziehungs- und Zentrifugalkräften noch weitere Kräfte, insbesondere Anziehungskräfte mitrotierender starrer Massen, wirken.

Sei $\kappa f G(x, y, z) = \kappa f \Gamma(\xi, \eta, \zeta^*)$ das Potential dieser Kräfte³⁸⁾. Sei ferner T_1 irgendein Körper in der Nachbarschaft erster Ordnung von T , der folgende Eigenschaften hat. Der Schwerpunkt von T_1 deckt sich mit demjenigen von T , die Volumina zusammengehöriger Einzelmassen von T und T_1 haben denselben Wert. Es sei

$$(36) \quad \Lambda_1^* = \frac{\tilde{M}}{J_1} - \iint_{T_1, T_1} \frac{dv d\bar{v}}{D} - 2 \int_{T_1} G dv.$$

Die Gleichgewichtsfigur T soll stabil heißen, wenn Λ_1^* für $T_1 = T$ den kleinsten Wert annimmt.

³⁸⁾ Man beachte, daß das Feld $G(x, y, z)$ mitrotiert.

Es gilt nun

$$(137) \quad \int_{T_1-T} G dv = \int_0^1 dt \int_{S_t} \left(\Gamma + t \zeta \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} + \frac{t^2 \zeta^2}{1 \cdot 2} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \nu^2} + \dots \right) \zeta \cos \varphi_t d\sigma, \\ (\Gamma = \Gamma(\xi, \eta, 0))$$

mithin (vgl. § 2)

$$(138) \quad \Lambda_1^* - \Lambda = -\frac{\omega^2}{f\kappa} \int_0^1 dt \int_{S_t} [R^2 + 2(aX + bY)t\zeta + (a^2 + b^2)t^2\zeta^2] \zeta \cos \varphi_t d\sigma \\ + \frac{\omega^2}{f\kappa} \frac{(AJ)^2}{J} \left(1 - \frac{AJ}{J} + \frac{(AJ)^2}{J^2} - \dots \right) - 2 \int_0^1 dt \int_{S_t} \zeta \cos \varphi_t [U + tU^{(1)} + t^2U^{(2)} + \dots \\ - 2 \int_0^1 dt \int_{S_t} \zeta \cos \varphi_t \left(\Gamma + t \zeta \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} + \dots \right) d\sigma_t.$$

Für die Glieder zweiter Ordnung erhalten wir jetzt wieder den Ausdruck

$$(139) \quad - \int_S \psi \zeta^2 d\sigma - \int_S \int_S \frac{1}{\varrho} \zeta \zeta' d\sigma d\sigma' + \frac{\omega^2}{f\kappa J} \left(\int_S R^2 \zeta d\sigma \right)^2 \text{ (69)}.$$

Für die Gesamtheit der Glieder dritter und höherer Ordnung gilt eine zu (60) analoge Abschätzung. Die weitere Behandlung ist der in den §§ 4 bis 7 durchgeführten ganz analog. Einige Aufmerksamkeit erfordert die Berücksichtigung der trivialen Lösungen der Integralgleichung (112) III, die hier unter Umständen auch ganz fehlen können⁷⁰⁾.

Ist der kleinste positive Eigenwert der charakteristischen Integralgleichung $\mu_1 > 1$, so ist T stabil⁷¹⁾. Ist $\mu_1 < 1$, so ist T labil. Geht man in beiden Fällen von T zu einer anderen Gleichgewichtsfigur $\hat{T}$ in einer hinreichend nahen Umgebung von T , wobei außer der Winkelgeschwindigkeit auch noch das äußere Feld eine kleine Änderung erfahren darf, so findet man wieder $\hat{\mu}_1 > 1$ oder $\hat{\mu}_1 < 1$ (man vergleiche die Ausführungen am Schluß des § 7). Eine Änderung des Stabilitätscharakters kann nur dort eintreten, wo $\mu_1 = 1$ ist.

⁶⁹⁾ In (138) hat das vierte Integral rechterhand den Wert

$$- 2 \int_0^1 dt \int_{S_t} \zeta \cos \varphi_t I' d\sigma_t - 2 \int_0^1 dt \int_S \left(t \zeta \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} + \dots \right) (1 + E_1 t + E_2 t^2) \zeta d\sigma.$$

Auf S^j ($j = 1, \dots, q$) ist

$$U + \frac{\omega^2 R^2}{2\kappa f} + I' = \text{Const},$$

weshalb die Glieder erster Ordnung verschwinden. Man beachte, daß jetzt die Schwerkraft $\propto f\psi$ durch die Formel (110) III definiert ist.

⁷⁰⁾ Vgl. das in dem § 1 des sechsten Kapitels behandelte Beispiel.

⁷¹⁾ Die trivialen Nulllösungen bleiben dabei wie stets bis jetzt außer Betracht.

Fünftes Kapitel.

Stabilitätsbetrachtungen. Der singuläre Fall.

§ 1.

Stabilitätscharakter der Nachbarfiguren.

1. Wir wenden uns jetzt der eingehenden Betrachtung des bis jetzt seite gelassenen Falles $\mu_1 = 1$ zu. Der Einfachheit halber wird zunächst angenommen, daß die Gleichgewichtsfigur T aus einer einzigen zusammenhängenden Masse besteht ($q = 1$) und Außenfelder nicht vorliegen. Um den Formelapparat möglichst übersichtlich zu gestalten, sehen wir von der Nebenbedingung, daß der Schwerpunkt der Vergleichsfigur auf der Rotationsachse liegen soll, ab. Die charakteristische Integralgleichung hat jetzt darum die Form (86) IV. Die vollständige Diskussion, die jene Nebenbedingung berücksichtigen muß und daher von der in § 7 abgeleiteten Integralgleichung auszugehen hat, verläuft ganz analog. Auch der Fall bedingter Stabilität erledigt sich in ganz ähnlicher Weise. Die Integralgleichung (86) IV soll zunächst nur eine einzige zu dem Eigenwerte $\mu = 1$ gehörige in der üblichen Weise normierte nicht triviale Nulllösung v_0 haben.

Wir nehmen an, daß v_0 in bezug auf die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ symmetrisch ist.

Ist S eine Rotationsfläche um die z -Achse, so ist v_0 offenbar von der Form $\mathfrak{F}(\mathfrak{s})$. Die Funktion $\mathfrak{F}(\mathfrak{s})$ ist in bezug auf die Ebene $z = 0$ symmetrisch.

Sei Θ eine lineare Reihe von Gleichgewichtsfiguren, der T angehört; kann Θ eine reguläre Reihe oder ein nicht regulärer Arm von Gleichgewichtsfiguren sein.

Das Volumen der einzelnen Figuren in Θ kann demjenigen von T gleich sein oder nicht.

Wir lassen den Stabilitätscharakter von T zunächst noch unentschieden und beschäftigen uns mit der Frage nach dem Stabilitätscharakter einer Gleichgewichtsfigur $\hat{T}$ von Θ in der Nachbarschaft von T . Bezeichnen wir die verschiedenen im Laufe unserer Untersuchung eingeführten Größen, angewandt auf die Figur $\hat{T}$, mit dem Zeichen $\hat{}$. Die soeben aufgeworfene Frage ist offenbar mit der folgenden Frage gleichbedeutend:

Die Integralgleichung

$$\hat{\psi} \hat{z} + \hat{\mu} \int_{\hat{S}} \left(\frac{1}{\hat{r}} + \hat{Q} \right) \hat{z}' d\hat{\sigma}' = 0$$

ist gewiß die trivialen Eigenfunktionen $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}$; sie gehören alle zu

dem Eigenwert $\hat{\mu} = 1$ ⁷²⁾. Welches ist der kleinste positive Eigenwert $\hat{\mu}$ der Integralgleichung (1), wenn die soeben genannten Eigenfunktionen außer Betracht bleiben?

Diejenigen Individuen von Θ , für die $\hat{\mu}_1 > 1$ ist, sind stabil, diejenigen, für die $\hat{\mu}_1 < 1$ ist, sind labil⁷³⁾. Gehört T einer einzigen einparametrischen regulären Reihe von Gleichgewichtsfiguren an, so ist es denkbar, daß alle Figuren in der Nähe von T stabil oder labil sind; es könnte aber auch in T ein Wechsel des Stabilitätscharakters eintreten. Gehen von T zwei oder mehrere nicht reguläre Arme von Gleichgewichtsfiguren aus, so könnten einzelne von diesen in der Nähe von T aus lauter stabilen, die anderen aus lauter labilen Figuren bestehen. Der Stabilitätscharakter von T selbst bleibt, wie bereits erwähnt, vorderhand noch unentschieden⁷⁴⁾.

Die zuletzt präzisierte Frage kann man, wie man leicht sieht, auch so fassen:

Welches ist der kleinste positive Eigenwert der Integralgleichung

$$(2) \quad \psi \hat{z} + \hat{\mu} \int_{\hat{z}} \left[\frac{1}{\hat{z}} + \hat{Q} - \hat{\psi} \hat{\psi}' (\hat{u}_1 \hat{u}_1' + \hat{u}_2 \hat{u}_2' + u u') \right] \hat{z}' d\hat{\sigma}' = 0 ?$$

Nach bekannten Sätzen hat der Kern von (2) alle Eigenfunktionen der Integralgleichung (1) mit Ausnahme von $\hat{u}_1$, $\hat{u}_2$, $\hat{u}$ zu Eigenfunktionen. Wie sich durch Betrachtung des Fredholmschen Nenners in bekannter Weise zeigen läßt, ist $\hat{\mu}_1$ ein einfacher Eigenwert und es gilt

$$(3) \quad \lim_{\hat{z} \rightarrow s} \hat{\mu}_1 = 1.$$

Für (2) können wir nach Einführung von $\hat{\vartheta} = \hat{\mu} - 1$ auch schreiben

⁷²⁾ Ist T eine Rotationsfläche, so ist v_0 (nach Voraussetzung) von der Form $\mathfrak{F}(\hat{z})$. Die Integralgleichung (1) II hat offenbar keine nicht triviale Nulllösung oder doch nur Nulllösungen von der Form $\mathfrak{F}(\hat{z})$. Den Ergebnissen des § 5 des dritten Kapitels gemäß sind alle Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft von T Rotationskörper um die z -Achse; es ist darum gewiß $\hat{u}_2 \equiv 0$.

Wir wählen $\hat{u}$ so, daß gleichmäßig $\hat{u} \rightarrow u$ gilt. Augenscheinlich gilt gleichmäßig $\hat{u}_1 \rightarrow u_1$, $\hat{u}_2 \rightarrow u_2$.

⁷³⁾ Man kommt auf diesem Wege nur in dem einen besonderen Falle zu keiner Entscheidung, wenn für alle $\hat{T}$ in Θ der kleinste positive Eigenwert μ_1 gleich 1 ausfällt.

⁷⁴⁾ Die einzelnen Körper der Reihe Θ werden im allgemeinen verschiedenen Volumina haben. Wie man weiß, kann man durch eine Ähnlichkeitstransformation zu Körpern konstanten Volumens gelangen. Dieser Übergang erscheint hier indessen überflüssig, da dabei der Stabilitätscharakter erhalten bleibt.

$$\begin{aligned}
 & \psi \mathfrak{z} + \int_S \left[\frac{1}{\varrho} + Q - \psi \psi' (u_1 u_1' + u_2 u_2' + \dot{u} \dot{u}') \right] \mathfrak{z}' d\sigma' = -(\hat{\psi} - \psi) \mathfrak{z} \\
 & - \hat{\psi} \int_S \left[\frac{1}{\varrho} + Q - \psi \psi' (u_1 u_1' + u_2 u_2' + \dot{u} \dot{u}') \right] \mathfrak{z}' d\sigma' - (1 + \hat{\psi}) \left[\int_S \frac{1}{\varrho} \mathfrak{z}' d\sigma' - \int_S \frac{1}{\varrho} \mathfrak{z}' d\sigma' \right] \\
 & - (1 + \hat{\psi}) \left[\int_S \hat{Q} \mathfrak{z}' d\hat{\sigma}' - \int_S Q \mathfrak{z}' d\sigma' \right] \\
 & (1 + \hat{\psi}) \left[\int_S \hat{\psi} \hat{\psi}' (\hat{u}_1 \hat{u}_1' + \hat{u}_2 \hat{u}_2' + \hat{u} \hat{u}') \mathfrak{z}' d\hat{\sigma}' - \int_S \psi \psi' (u_1 u_1' + u_2 u_2' + \dot{u} \dot{u}') \mathfrak{z}' d\sigma' \right].
 \end{aligned}$$

Sei etwa Θ eine von einem Parameter λ abhängige reguläre Reihe von Gleichgewichtsfiguren:

$$\zeta = \sum_{l=1}^{\infty} d_l \lambda^l.$$

Wie wir in dem folgenden Paragraphen zeigen werden, läßt sich die Integralgleichung (4) in der Form darstellen

$$\begin{aligned}
 & \psi \mathfrak{z} + \int_S \left[\frac{1}{\varrho(\sigma, \sigma')} + Q(\sigma, \sigma') - \psi \psi' (u_1 u_1' + u_2 u_2' + \dot{u} \dot{u}') \right] \mathfrak{z}' d\sigma' = \lambda \mathfrak{P}_1(\sigma; \lambda) \mathfrak{z} \\
 & \lambda \int_S \mathfrak{P}_2(\sigma, \sigma'; \lambda) \mathfrak{z}' d\sigma' - \hat{\psi} \int_S \left[\frac{1}{\varrho(\sigma, \sigma')} + Q(\sigma, \sigma') - \psi \psi' (u_1 u_1' + u_2 u_2' + \dot{u} \dot{u}') \right] \mathfrak{z}' d\sigma' \\
 & + \hat{\psi} \lambda \int_S \mathfrak{P}_3(\sigma, \sigma'; \lambda) \mathfrak{z}' d\sigma' = \lambda \mathbf{S} \{ \sigma, \mathfrak{z}; \lambda, \hat{\psi} \} \\
 & - \hat{\psi} \int_S \left[\frac{1}{\varrho(\sigma, \sigma')} + Q(\sigma, \sigma') - \psi \psi' (u_1 u_1' + u_2 u_2' + \dot{u} \dot{u}') \right] \mathfrak{z}' d\sigma',
 \end{aligned}$$

unter $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ gewisse nach ganzen positiven Potenzen von λ fortschreitende Reihen, die explizite angebar sind, verstanden.

Da die homogene aus (6) durch Nullsetzen der rechten Seite entstehende Integralgleichung eine Nulllösung v_0 hat, so muß nach bekannten Sätzen

$$\mathfrak{z}, \mathfrak{z}; \lambda, \hat{\psi} \} v_0 d\sigma - \hat{\psi} \int_S v_0 d\sigma \int_S \left[\frac{1}{\varrho(\sigma, \sigma')} + Q(\sigma, \sigma') - \psi \psi' (u_1 u_1' + u_2 u_2' + \dot{u} \dot{u}') \right] \mathfrak{z}' d\sigma' = 0$$

sein. Wegen

$$\int_S \left[\frac{1}{\varrho(\sigma, \sigma')} + Q(\sigma, \sigma') - \psi \psi' (u_1 u_1' + u_2 u_2' + \dot{u} \dot{u}') \right] v_0 d\sigma = -\psi' v_0'$$

kann man hierfür einfacher schreiben

$$\hat{\psi} \int_S \psi' v_0' \mathfrak{z}' d\sigma' + \lambda \int_S \mathbf{S} \{ \sigma, \mathfrak{z}; \lambda, \hat{\psi} \} v_0 d\sigma = 0.$$

Der Kern

$$(10) \quad \frac{1}{\psi} N_2(\sigma, \sigma') = \left[\frac{1}{\varrho} + Q - \psi \psi' (u_1 u_1' + u_2 u_2' + \dot{u} \dot{u}' + v_0 v_0') \right] \frac{1}{\psi}$$

hat keine Nulllösung, die zu dem Eigenwert 1 gehören würde. Der zugehörige lösende Kern möge $H_2(\sigma, \sigma')$ heißen.

Es sei $\hat{v}_0(\sigma)$ die normierte Eigenfunktion der Integralgleichung (2), die zu dem kleinsten positiven Eigenwert gehört. Aus (2), (4), (6) folgt nach bekannten Sätzen

$$(11) \quad \begin{aligned} \hat{v}_0(\sigma) = & \mathbf{C} v_0(\sigma) + \frac{\lambda}{\psi} S\{\sigma, \hat{v}_0; \lambda, \hat{\vartheta}\} - \frac{\hat{\vartheta}}{\psi} \int_{\hat{S}} \left[\frac{1}{\varrho(\sigma, \sigma')} + Q(\sigma, \sigma') \right. \\ & \left. - \psi \psi' (u_1 u_1' + u_2 u_2' + \dot{u} \dot{u}') \right] \hat{v}_0' d\sigma' - \int_{\hat{S}} H_2(\sigma, \sigma') d\sigma' \left\{ \frac{\lambda}{\psi'} S\{\sigma', \hat{v}_0'; \lambda, \hat{\vartheta}'\} \right. \\ & \left. - \frac{\hat{\vartheta}'}{\psi'} \int_{\hat{S}} \left[\frac{1}{\varrho(\sigma', \sigma'')} + Q(\sigma', \sigma'') - \psi' \psi'' (u_1' u_1'' + u_2' u_2'' + \dot{u}' \dot{u}'') \right] \hat{v}_0'' d\sigma'' \right\} \end{aligned}$$

Wegen $\hat{v}_0(\sigma) \rightarrow v_0(\sigma)$ für $\hat{S} \rightarrow S$ gilt gewiß $\mathbf{C} \rightarrow 1$. Wir setzen $\frac{\hat{v}_0(\sigma)}{\mathbf{C}} = \bar{v}_0(\sigma)$. Da in (11) alle Glieder in bezug auf $\hat{v}_0$ vom ersten Grade sind, so erhalten wir durch eine einfache Division

$$(12) \quad \begin{aligned} \bar{v}_0(\sigma) = & v_0(\sigma) + \frac{\lambda}{\psi} S\{\sigma, \bar{v}_0; \lambda, \hat{\vartheta}\} - \frac{\hat{\vartheta}}{\psi} \int_{\hat{S}} \left[\frac{1}{\varrho(\sigma, \sigma')} + Q(\sigma, \sigma') \right. \\ & \left. - \psi \psi' (u_1 u_1' + u_2 u_2' + \dot{u} \dot{u}') \right] \bar{v}_0' d\sigma' - \int_{\hat{S}} H_2(\sigma, \sigma') d\sigma' \left\{ \frac{\lambda}{\psi'} S\{\sigma', \bar{v}_0'; \lambda, \hat{\vartheta}'\} \right. \\ & \left. - \frac{\hat{\vartheta}'}{\psi'} \int_{\hat{S}} \left[\frac{1}{\varrho(\sigma', \sigma'')} + Q(\sigma', \sigma'') - \psi' \psi'' (u_1' u_1'' + u_2' u_2'' + \dot{u}' \dot{u}'') \right] \bar{v}_0'' d\sigma'' \right\} \end{aligned}$$

Die Beziehung (12) kann als eine Integro-Differentialgleichung zur Bestimmung von $\bar{v}_0$ aufgefaßt werden. Sie läßt sich, wie man ohne Schwierigkeiten sieht, durch sukzessive Approximationen auflösen und liefert für hinreichend kleine Werte von $|\lambda|$ und $|\hat{\vartheta}|$, etwa

$$(13) \quad |\hat{\vartheta}|, |\lambda| < \varepsilon$$

einen Ausdruck von der Form

$$(14) \quad \bar{v}_0(\sigma) = v_0(\sigma) + \sum_{l_1, l_2} e_{l_1, l_2}(\sigma) \lambda^{l_1} \hat{\vartheta}^{l_2} \quad (l_1 + l_2 > 0)$$

Diesen Ausdruck setzen wir für $\bar{v}_0$ in (9) ein und erhalten wegen

$$(15) \quad \int_{\hat{S}} \psi v_0^2 d\sigma = -1,$$

$$(16) \quad \hat{\vartheta} \left(1 + \sum_{l_1, l_2} h_{l_1, l_2} \lambda^{l_1} \hat{\vartheta}^{l_2} \right) = \lambda \sum_{l_1, l_2} f_{l_1, l_2} \lambda^{l_1} \hat{\vartheta}^{l_2} \quad (l_1 + l_2 \geq 0, l_3 + l_4 > 0)$$

Dies ist eine Gleichung zur Bestimmung von $\hat{\vartheta}$. Sind nicht alle Koeffizienten $f_{i,0}$ gleich Null, so gewinnt man hieraus für $\hat{\vartheta}$ einen Ausdruck von der Form

$$(7) \quad \hat{\vartheta} = g_1 \lambda + g_2 \lambda^2 + \dots$$

Ist $g_1 > 0$, so sind die zu positiven λ gehörigen Gleichgewichtsfiguren der linearen Reihe Θ stabil, die zu $\lambda < 0$ gehörigen Figuren labil. Ist $g_1 < 0$, so sind im Gegenteil die zuerst genannten Gleichgewichtsfiguren labil, die anderen dagegen stabil. Sollen alle Figuren in der beiderseitigen Nachbarschaft von T stabil sein, so muß $g_1 = 0$, $g_2 \geq 0$ sein. Diese sind gewiß stabil, wenn $g_1 = 0$, $g_2 > 0$ ist. Ist aber $g_1 = 0$, $g_2 = 0$, so muß auch $g_3 = 0$ und $g_4 \geq 0$ sein. Die Diskussion bietet natürlich, wenn erst der Ausdruck (17) gewonnen ist, nicht die geringsten Schwierigkeiten dar.

Sind alle $f_{i,0} = 0$, so ist $\hat{\vartheta} \equiv 0$. Für alle Gleichgewichtsfiguren der Reihe Θ in der Nachbarschaft von T ist der kleinste positive Eigenwert gleich 1. Die vorhin skizzierte Betrachtung führt alsdann zu keiner Entscheidung über den Charakter der Nachbarfiguren. Ob dieser Fall wirklich eintreten kann, bleibt dahingestellt.

2. Wir haben bis jetzt vorausgesetzt, daß die Integralgleichung (86) IV eine nicht triviale Lösung hat. Die Betrachtung verläuft ganz ähnlich, wenn (86) IV ein Paar nicht trivialer Nulllösungen, $u_3 = \mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \cos k\mathfrak{d}$, $u_4 = \mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \sin k\mathfrak{d}$, hat, unter $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{s})$ eine in bezug auf die Ebene $z = 0$ symmetrische Funktion verstanden.

Diese Lösungen sind zugleich nicht triviale Nulllösungen der Integralgleichung (1) II (vgl. § 5 des vierten Kapitels). Wie wir wissen, gehört T gewiß einer regulären Reihe von Gleichgewichtsfiguren mit Rotationsymmetrie um die z -Achse an. Außerdem können von T nicht reguläre Arme von Gleichgewichtsfiguren ausgehen; die einzelnen Figuren dieser Arme sind gewiß keine Rotationskörper.

Sei Θ etwa einer dieser Arme. Die zu der Figur $\hat{T}$ gehörige zu (86) IV analoge Integralgleichung hat die trivialen Nulllösungen $\hat{u}$, $\hat{u}_1$ und $\hat{u}_2$. Wie wir in § 5 des dritten Kapitels gesehen haben, ist

$$\lim_{s \rightarrow \hat{s}} \hat{u}_2 = \mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \sin k\mathfrak{d}.$$

Die Betrachtung verläuft ganz wie vorhin, nur sind in (4) und in den folgenden Gleichungen u_2 und v_0 überall durch u_4 und u_3 zu ersetzen. Wir finden, daß die zu $\hat{T}$ zugehörige zu (86) IV analoge Integralgleichung eine nicht triviale Nulllösung hat; diese konvergiert für $\hat{S} \rightarrow S$ gegen $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{s}) \cos k\mathfrak{d}$.

Es möge zweitens Θ die von T ausgehende reguläre Reihe sein. Aus Gründen der Stetigkeit hat die charakteristische Integralgleichung in der Nachbarschaft von T ein Paar zu demselben Eigenwert $\hat{\mu}_1$ gehöriger normierter Eigenfunktionen von der Form $\hat{\mathfrak{F}}_1(\hat{s}) \cos k \hat{b}$, $\hat{\mathfrak{F}}_1(\hat{s}) \sin k \hat{b}$.

Dabei gilt offenbar für $\hat{S} \rightarrow S$ gleichmäßig

$$\hat{\mathfrak{F}}_1(\hat{s}) \rightarrow \mathfrak{F}_1(s).$$

Das Problem lautet jetzt so: Es wird die zu dem kleinsten positiven Eigenwert, $\hat{\mu}_1$, gehörige Eigenfunktion, $\hat{v}_3$, der Integralgleichung

$$\hat{\psi} \hat{z} + \hat{\mu} \int_{\hat{S}} \left[\frac{1}{\hat{e}} + \hat{Q} - \hat{\psi} \hat{\psi}' (\hat{u}_1 \hat{u}_1' + \hat{u} \hat{u}') \right] \hat{z}' d\sigma' = 0$$

gesucht, die von der Form $\hat{\mathfrak{F}}_1(\hat{s}) \cos k \hat{b}$ ist. Es gilt

$$\lim_{\hat{S} \rightarrow S} \hat{\mu}_1 = 1.$$

In den Gleichungen (2), (4) usw. ist jetzt $u_2 \equiv 0$, $\hat{u}_2 \equiv 0$ zu setzen. In (7), (8), (9) wird u_3 für v_0 geschrieben. Die jetzt auftretende zweite Bedingungsgleichung

$$\begin{aligned} \lambda \int_S \mathbf{S} \{ \sigma, \hat{s}; \lambda, \hat{\psi} \} u_4 d\sigma - \hat{\psi} \int_S u_4 d\sigma \int_S \left[\frac{1}{e(\sigma, \sigma')} + Q(\sigma, \sigma') \right. \\ \left. - \psi \psi' (u_1 u_1' + u u') \right] \hat{z}' d\sigma' = 0 \end{aligned}$$

ist, wie man sich ohne Mühe überzeugt, wenn man $\hat{z} = \hat{u}_3$ setzt, für alle λ identisch erfüllt.

Für die Gleichung (10) tritt jetzt ein:

$$\frac{1}{\psi} N_2(\sigma, \sigma') = \left[\frac{1}{e} + Q - \psi \psi' (u_1 u_1' + u_3 u_3' + u_4 u_4' + u u') \right] \frac{1}{\psi'}.$$

Die Formel (11) ist durch die Formel

$$(12^*) \left\{ \begin{aligned} \hat{u}_3(\sigma) &= \mathbf{C}_2 u_3(\sigma) + \mathbf{C}_1 u_4(\sigma) + \frac{\lambda}{\psi} \mathbf{S} \{ \sigma, \hat{u}_3; \lambda, \hat{\psi} \} \\ &- \frac{\hat{\psi}}{\psi} \int_S \left[\frac{1}{e(\sigma, \sigma')} + Q(\sigma, \sigma') - \psi \psi' (u_1 u_1' + u u') \right] \hat{u}_3 d\sigma' - \dots \end{aligned} \right.$$

zu ersetzen. Da für alle hinreichend kleinen λ

$$\int_S \psi(\sigma) \hat{u}_3(\sigma) u_4(\sigma) d\sigma = 0$$

ist und in (12*) alle Glieder rechterhand, abgesehen von dem zweiten, mit $u_4(\sigma)$ multipliziert und über S integriert, verschwinden, so ist $\mathbf{C}_1 = 0$.

Die weitere Betrachtung verläuft mutatis mutandis wie vorhin.

Der Einfachheit halber haben wir die Nebenbedingung, daß der Schwerpunkt der Vergleichsfigur auf der Rotationsachse liegen soll, unbeachtet gelassen. Wie bereits erwähnt, bietet die vervollständigte Betrachtung keine Schwierigkeiten mehr. Auch läßt sich der allgemeine Fall eines aus mehreren Einzelmassen bestehenden Körpers, oder einer in einem Außenfelde befindlichen Flüssigkeit in ähnlicher Weise erledigen.

Auch das folgende neue Problem gestattet eine analoge Behandlung. Sei T eine Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeit, und es liege der allgemeine Fall, $\mu_1 = 1$, vor. Zu den wirkenden Kräften tritt ein Außenfeld hinzu. Für hinreichend kleine Werte dieses Feldes gibt es, wie wir wissen, zu T benachbarte Gleichgewichtsfiguren. Ihr Stabilitätscharakter ist zu bestimmen.

§ 2.

Fortsetzung.

Jetzt gilt es, die einzelnen Glieder in (4) rechterhand nach Potenzen von λ zu entwickeln. Wir beginnen mit dem Ausdruck

$$8) \quad \int_S \frac{1}{\varrho} \delta' d\hat{\sigma}' - \int_S \frac{1}{\varrho} \delta' d\sigma'.$$

Wir verfahren ähnlich wie in § 2 des ersten Kapitels und schalten zwischen S und $\hat{S}$ die Flächenschar $S_t = S + t(\hat{S} - S)$ ein. Dem Punkte (ξ, η) auf S entspricht der Punkt $\xi, \eta, t\zeta$ auf S_t . Unter Vorwegnahme der Existenz der in der folgenden Formel auftretenden Ableitung ist offensichtlich

$$9) \quad \int_S \frac{1}{\varrho} \delta' d\hat{\sigma}' - \int_S \frac{1}{\varrho} \delta' d\sigma' = \int_0^1 dt \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_t} \frac{1}{\varrho_t} \delta' a \sigma'_t.$$

Es gilt nun, wie man sich ohne Schwierigkeiten überzeugt,

$$10) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_t} \frac{1}{\varrho_t} \delta' d\sigma'_t = \int_{S_t} \delta' \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{d\sigma'_t}{\varrho_t} \right) \quad (11).$$

12) Für alle t in dem Intervalle $0 \leq t \leq 1$ ist nämlich, wenn $\bar{S}_t$ den zu der Kreisfläche $(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 \leq \bar{D}^2$ um (ξ, η) gehörigen Teil von S_t bezeichnet, gewiß

$$1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{\bar{S}_t - \bar{S}_t} \frac{1}{\varrho_t} \delta' d\sigma'_t = \int_{\bar{S}_t - \bar{S}_t} \delta' \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{d\sigma'_t}{\varrho_t} \right).$$

Der Ausdruck rechterhand konvergiert für $\bar{D} \rightarrow 0$ für alle t in (11) gleichmäßig gegen die rechte Seite der Formel (20).

Es möge etwa Θ eine nur von λ abhängige (eiparametrische) reguläre Reihe von Gleichgewichtsfiguren sein. Wie man leicht sieht, ist für alle hinreichend kleinen Werte von $|\zeta|$, $|D_1 \zeta|$ und $|\lambda| \dots \int_{S_i} \partial' \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\varrho_i} \right) d\sigma_i'$ eine analytische und reguläre Funktion von t und λ in einem Bereiche $|t| \leq k^* > 1$, $|\lambda| \leq \lambda_0$.

Ist Θ ein nicht regulärer Arm von Gleichgewichtsfiguren und gilt für ζ eine Entwicklung nach Potenzen von λ^{m_1} ($m_1 \neq 1$), so ist entsprechend $\int_{S_i} \partial' \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\varrho_i} \right) d\sigma_i'$ in bezug auf t und λ^{m_1} analytisch und regulär.

In beiden Fällen gilt

$$(22) \quad \int_{S_i} \partial' \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\varrho_i} d\sigma_i' \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \int_{S_i} \partial' \left[\frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} \left(\frac{1}{\varrho_i} d\sigma_i' \right) \right]_{t=0} t^n,$$

demnach wegen (19) und (20)

$$(23) \quad \int_{S_i} \partial' \frac{1}{\varrho} d\hat{\sigma}' - \int_{S_i} \partial' \frac{1}{\varrho} d\sigma' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \int_{S_i} \partial' \left[\frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} \left(\frac{1}{\varrho_i} d\sigma_i' \right) \right]_{t=0}.$$

Man findet insbesondere leicht für das erste Glied der Entwicklung (23) den Ausdruck

$$(24) \quad - \int_{S_i} d\sigma' \frac{\partial}{\partial \xi} \sum (X' - X)(a'\zeta' - a\zeta) + \int_{S_i} \partial' \frac{d\xi' d\eta'}{\varrho'} \sum a' \left\{ \frac{\partial(Y', c'\zeta')}{\partial(\xi', \eta')} - \frac{\partial(Z')}{\partial(\xi', \eta')} \right\}$$

Das erste Glied der Entwicklung von (24) nach Potenzen von λ ist darum, wenn etwa

$$(25) \quad \zeta = \sum_{l=1}^{\infty} d_l \lambda^l$$

angenommen wird, gleich

$$(26) \quad - d_1 \lambda \int_{S_i} d\sigma' \frac{\partial}{\partial \xi} \sum (X' - X)(a' - a) + \lambda \int_{S_i} \partial' \frac{d\xi' d\eta'}{\varrho'} \sum a' \left\{ \frac{\partial(Y', c'd_1')}{\partial(\xi', \eta')} - \frac{\partial(Z')}{\partial(\xi', \eta')} \right\}$$

Betrachten wir jetzt den Ausdruck für die Schwerkraft

$$(27) \quad \psi = \frac{\partial}{\partial \nu} W(\xi, \eta, 0) + \frac{\omega^2}{f \kappa} R \tau \\ = \int_T \frac{c}{\partial \nu} \frac{1}{\varrho(\sigma; x, y, z)} dx dy dz + \frac{\omega^2}{f \kappa} R \tau = \psi_1 + \frac{\omega^2}{f \kappa} R \tau.$$

Durch teilweise Integration läßt sich in bekannter Weise das Volumenintegral in ein über S erstrecktes Integral transformieren

²⁶⁾ Vgl. die analogen Betrachtungen in § 2 des ersten Kapitels.

$$(28) \quad \psi_1 = - \int_{\hat{S}} \frac{\cos \theta'}{\varrho} d\sigma' \quad (27).$$

s ist demnach

$$(29) \quad \hat{\psi}_1 - \psi_1 = - \int_{\hat{S}} \frac{\cos \hat{\theta}'}{\hat{\varrho}} d\hat{\sigma}' + \int_{\hat{S}} \frac{\cos \theta'}{\varrho} d\sigma'$$

der

$$(30) \quad \hat{\psi}_1 - \psi_1 = - \int_{\hat{S}} \frac{\cos \hat{\theta}'}{\hat{\varrho}} d\hat{\sigma}' + \int_{\hat{S}} \frac{\cos \hat{\theta}'}{\varrho} d\sigma' + \int_{\hat{S}} \frac{\cos \theta'}{\varrho} d\sigma' - \int_{\hat{S}} \frac{\cos \hat{\theta}'}{\varrho} d\sigma' \quad (26).$$

Wegen (23) ist, wie man leicht sieht,

$$(31) \quad - \int_{\hat{S}} \frac{\cos \hat{\theta}'}{\hat{\varrho}} d\hat{\sigma}' + \int_{\hat{S}} \frac{\cos \hat{\theta}'}{\varrho} d\sigma' = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \int_{\hat{S}} \cos \hat{\theta}' \left[\frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} \left(\frac{1}{\varrho_t} d\sigma_t' \right) \right]_{t=0}.$$

hier ist

$$(32) \quad \cos \hat{\theta}' = \frac{A_{\zeta} A'_{\zeta} + B_{\zeta} B'_{\zeta} + C_{\zeta} C'_{\zeta}}{\sqrt{A_{\zeta}^2 + B_{\zeta}^2 + C_{\zeta}^2} \sqrt{A'_{\zeta}^2 + B'_{\zeta}^2 + C'_{\zeta}^2}}, \quad A_{\zeta} = \frac{\partial(Y + b\zeta, Z + c\zeta)}{\partial(\xi, \eta)}, \dots$$

anzusetzen. Aus (30), (31), (32) und (25) ergibt sich die Entwicklung von $\hat{\psi}_1 - \psi_1$ nach Potenzen von λ . Beachtet man ferner, daß

$$(33) \quad \frac{\hat{\omega}^2 - \omega^2}{2f^2} = \lambda, \quad \frac{\hat{\omega}^2}{f^2} \hat{R} \hat{\tau} - \frac{\omega^2}{f^2} R \tau = \frac{2\lambda}{f^2} R \tau + \left(\frac{\omega^2}{f^2} + 2\lambda \right) (\hat{R} \hat{\tau} - R \tau),$$

$$R \tau = aX + bY, \quad \hat{R} \hat{\tau} = \hat{a}\hat{X} + \hat{b}\hat{Y},$$

$$\hat{a} = \frac{A_{\zeta}}{\sqrt{A_{\zeta}^2 + B_{\zeta}^2 + C_{\zeta}^2}}, \quad \hat{X} = X + a\zeta, \dots$$

gilt, so findet man ohne Schwierigkeiten die gewünschte Darstellung von $\hat{\psi} - \psi$ als Potenzreihe von λ .

Es bleibt noch die übrigen Glieder in (4) rechterhand zu entwickeln. Es gilt

$$(34) \quad u_1 = \frac{c}{\sqrt{-\int_{\hat{S}} \psi c^2 d\sigma}}, \quad \hat{u}_1 = \frac{\hat{c}}{\sqrt{-\int_{\hat{S}} \hat{\psi} \hat{c}^2 d\hat{\sigma}}}, \quad \hat{c} = \frac{C_{\zeta}}{\sqrt{A_{\zeta}^2 + B_{\zeta}^2 + C_{\zeta}^2}},$$

darum mit Rücksicht auf die soeben besprochene Entwicklung von $\hat{\psi} - \psi$

$$(35) \quad \hat{u}_1 = u_1 + \lambda \mathfrak{P}_4(\sigma; \lambda)$$

und analog

$$(36) \quad \hat{u}_2 = u_2 + \lambda \mathfrak{P}_5(\sigma; \lambda).$$

⁷⁷⁾ Der im ersten Kapitel benutzten Bezeichnungsweise entsprechend ist θ' der Winkel zwischen den Außennormalen (ν) und (ν') in σ und σ' eingeschlossene Winkel.

⁷⁸⁾ Den Punkten (ξ, η) und (ξ', η') auf $\mathcal{L}$ entsprechen auf $\hat{S}$ zwei bestimmte Punkte. Der von den zugehörigen Normalen an $\hat{S}$ eingeschlossene Winkel wurde mit $\hat{\theta}'$ bezeichnet.

Wir finden weiter, wenn wir der Einfachheit halber $\hat{u}$ und $\hat{u}$ auf S bzw. $\hat{S}$ konstant annehmen⁷⁹⁾,

$$\begin{aligned} \hat{f}(\sigma) &= \int_{\hat{S}} \frac{1}{\varrho} \hat{u}' d\hat{\sigma}' = f(\sigma) + \hat{u} \left(\int_{\hat{S}} \frac{1}{\varrho} d\hat{\sigma}' - \int_S \frac{1}{\varrho} d\sigma' \right) + (\hat{u} - u) \int_S \frac{1}{\varrho} d\sigma' \\ (37) \quad &= f(\sigma) + \hat{u} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \int_S \left[\frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} \left(\frac{1}{\varrho'} d\sigma' \right) \right]_{t=0} + (\hat{u} - u) \int_S \frac{1}{\varrho} d\sigma', \end{aligned}$$

$$(38) \quad \hat{a} = a + \lambda \mathfrak{P}_6(\sigma; \lambda), \quad \hat{b} = b + \lambda \mathfrak{P}_7(\sigma; \lambda)$$

und augenscheinlich

$$(39) \quad \hat{Q} = Q + \lambda \mathfrak{P}_8(\sigma, \sigma'; \lambda).$$

Damit sind in der Tat alle zur wirklichen Durchführung der in § 1 angedeuteten Rechnungen erforderlichen Elemente gewonnen.

Die Rechnungen lassen sich natürlich in ähnlicher Weise durchführen, wenn es sich um einen nicht regulären Arm von Gleichgewichtsfiguren handelt; man kommt zu Entwicklungen nach Potenzen von λ^{m_1} .

§ 3.

Stabilitätscharakter der singulären Figur. Eine für die Stabilität notwendige Bedingung.

Es sei jetzt Θ irgendeine von T ausgehende (eiparametrische) Reihe von Gleichgewichtsfiguren konstanten Volumens jedes Einzelkörpers⁸⁰⁾. Eine für die Stabilität notwendige Bedingung erhält man, wenn man für Vergleichsfiguren Körper aus Θ annimmt⁸¹⁾. Für $\Lambda_1 - \Lambda$ läßt sich in diesem Falle ein einfacher geschlossener Ausdruck angeben⁸²⁾.

Es ist (vgl. § 1 des vierten Kapitels)

$$(40) \quad \Lambda_1 - \Lambda = \frac{\tilde{M}}{J_1} - \frac{\tilde{M}}{J} - \int_{T_1} \int_{T_1} \frac{dv d\bar{v}}{D} + \int_T \int_T \frac{dv d\bar{v}}{D} = \frac{\tilde{M}}{J_1} - \frac{\tilde{M}}{J} - (E_1 - E).$$

Die zu T und T_1 gehörigen Werte des Parameters heißen α und α_1 . Wir denken uns zunächst $\alpha = \lambda$ oder $\alpha = \lambda^{m_1}$ gesetzt. Aus (40) folgt, daß in (3) IV Glieder erster Ordnung nicht vorkommen, für alle T_1 in Θ

⁷⁹⁾ Es ist also $\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{\int_S -\psi d\sigma}}$ und $\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{\int_{\hat{S}} -\hat{\psi} d\hat{\sigma}}}$, mithin $\hat{u} = \hat{u} + \lambda \mathfrak{P}_8(\sigma; \lambda)$.

⁸⁰⁾ Es kann Θ entweder ein Zweig einer T enthaltenden regulären Reihe oder ein von T ausgehender nicht regulärer Arm von Gleichgewichtsfiguren sein. Für $\hat{u}$ erhält man im ersteren Falle eine Entwicklung von der Form $\lambda \mathfrak{P}_{10}(\sigma; \lambda)$, in dem anderen Falle von der Form $\lambda^{m_1} \mathfrak{P}_{11}(\sigma; \lambda^{m_1})$ ($m_1 \neq 1$).

⁸¹⁾ Man beachte, daß der Schwerpunkt aller dieser Vergleichsfiguren auf der Rotationsachse liegt.

⁸²⁾ Vgl. A. Liapounoff, loc. cit. ¹⁰⁾, S. 60–63.

$$(41) \quad \frac{\partial \Lambda_1}{\partial \alpha_1} = 0,$$

omit, wie man leicht sieht,

$$(42) \quad -\frac{\tilde{M}_1}{J_1^2} \frac{\partial J_1}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial E_1}{\partial \alpha_1} = 0,$$

unter $\tilde{M}_1$ das Moment der Bewegungsgröße von T_1 verstanden. Aus (40) und (42) folgt jetzt

$$(43) \quad \begin{aligned} \Lambda_1 - \Lambda &= \frac{\tilde{M}}{J_1} - \frac{\tilde{M}}{J} - \int_{\alpha}^{\alpha_1} \frac{\partial E_1}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 = \frac{\tilde{M}}{J_1} - \frac{\tilde{M}}{J} + \int_{\alpha}^{\alpha_1} \frac{\tilde{M}_1}{J_1^2} \frac{\partial J_1}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \\ &= \tilde{M} \int_{\alpha}^{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{J_1} \right) d\alpha_1 + \int_{\alpha}^{\alpha_1} \frac{\tilde{M}_1}{J_1^2} \frac{\partial J_1}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 = \int_{\alpha}^{\alpha_1} \frac{\tilde{M}_1 - \tilde{M}}{J_1^2} \frac{\partial J_1}{\partial \alpha_1} d\alpha_1. \end{aligned}$$

Wir nehmen zunächst an, daß J_1 in Θ nicht identisch gleich J ist. Da $J_1 - J$ dann jedenfalls nach Potenzen von λ oder λ^{m_1} ($m_1 \neq 1$) entwickelt werden kann, sich mithin in einer Umgebung von T monoton ändert, so kann man $\alpha_1 = J_1$ setzen. Man findet dann einfacher

$$(44) \quad \Lambda_1 - \Lambda = \int_J^{J_1} \frac{\tilde{M}_1 - \tilde{M}}{J_1^2} dJ_1.$$

In hinreichender Nähe von T ist, da auch $\tilde{M}_1 - \tilde{M}$ von λ oder λ^{m_1} analytisch und regulär abhängt, in Θ entweder stets

$$(45) \quad \tilde{M}_1 \geq \tilde{M} \quad \text{oder} \quad \tilde{M}_1 \leq \tilde{M} \quad ^{83)}.$$

Damit Λ_1 für T Minimum wird, muß nach (44) offenbar sein:

$$(46) \quad \begin{aligned} \tilde{M}_1 &\geq \tilde{M} \quad \text{für} \quad J_1 > J, \\ \tilde{M}_1 &\leq \tilde{M} \quad \text{für} \quad J_1 < J. \end{aligned}$$

Das ist eine für das Minimum notwendige Bedingung. Sie gilt, wie aus den vorstehenden Entwicklungen unmittelbar hervorgeht, allgemein, d. h. auch wenn der kleinste positive Eigenwert der charakteristischen Integralgleichung größer als 1 ist. In diesem Falle ist sie, da dann das Minimum tatsächlich eintritt, gewiß erfüllt.

Ist in $\Theta \dots J_1$ identisch gleich J , so ist wegen (42) für alle T_1 in Θ auch $E_1 = E$, demnach $\Lambda_1 = \Lambda$. Ob dieser Fall wirklich eintreten kann, bleibt dahingestellt.

Eine andere weniger weitreichende notwendige Bedingung, die aber in manchen Fällen bequemer anwendbar sein dürfte, erhält man auf folgende Weise:

⁸³⁾ Ob $\tilde{M}_1$ identisch gleich $\tilde{M}$ sein kann, bleibt dahingestellt.

Es sei T , um nur einen besonders einfachen Fall zu betrachten, eine aus einer einzigen Masse bestehende Verzweigungsfigur mit den drei Symmetrieebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und es sei u_3 die einzige nicht triviale Nulllösung der Integralgleichung (1) II. Sie sei in bezug auf die Ebenen $x = 0$, $y = 0$ und $z = 0$ symmetrisch. Offenbar ist

$$(47) \quad \int_S u_3 d\sigma = 0, \quad \int_S u_3 X d\sigma = 0, \quad \int_S u_3 Y d\sigma = 0.$$

Betrachten wir die durch die Formel

$$(48) \quad \zeta = x_1 u_3 + x_2 + x_3 X + x_4 Y$$

definierte Schar von Körpern T_1 . In (48) ist x_1 ein reeller Parameter; x_2, x_3, x_4 sind so zu bestimmen, daß das Volumen von T_1 demjenigen von T gleich wird und der Schwerpunkt von T_1 auf die Rotationsachse zu liegen kommt. Mit Rücksicht auf (47) findet man leicht, daß x_2, x_3, x_4 in bezug auf x_1 von zweiter oder höherer Ordnung sind. Man kann darum setzen

$$(49) \quad \zeta = x_1 u_3 + \dots,$$

wo die nicht hingeschriebenen Glieder von mindestens zweiter Ordnung sind. Führt man in die Formel

$$(50) \quad \Lambda_1 - \Lambda = \Lambda^{(2)} + \Lambda^{(3)} + \dots$$

(vgl. die Formel (3) IV) für ζ den Ausdruck (49) ein, so müssen, falls ein Minimum vorliegt, die Glieder dritter Ordnung verschwinden.

Es ist leicht zu sehen, daß in $\Lambda^{(2)}$ Glieder dritter Ordnung in bezug auf x_1 nicht vorkommen. Setzt man nämlich vorübergehend

$$(51) \quad \zeta = \sum c_n u^{(n)}{}^{84)},$$

so findet man wegen (47) und (48)

$$c_1 = c_2 = 0, \quad c_3 = x_1{}^{85)},$$

während c_n ($n > 3$) in bezug auf x_1 von mindestens zweiter Ordnung sind. Die Formel

$$(52) \quad \Lambda^{(2)} = \sum_{n>3} \left(1 - \frac{1}{\nu^{(n)}}\right) \left(\int_S \psi \zeta u^{(n)} d\sigma\right)^2,$$

die zu der Formel (106) IV analog ist und ganz wie jene abgeleitet wird, zeigt in der Tat, daß $\Lambda^{(2)}$ von mindestens vierter Ordnung ist.

⁸⁴⁾ Die Bezeichnungsweise vergleiche das zweite Kapitel. Es gilt jetzt

$$u^{(1)} = u_1, \quad u^{(2)} = u_2, \quad u^{(3)} = u_3.$$

⁸⁵⁾ Man beachte, daß u_2 jetzt auch beim Übergang von einem Punkt zu dem in bezug auf die Ebene $x=0$ symmetrischen Punkt das Vorzeichen ändert.

Es ist leicht zu sehen, daß die Glieder dritter Ordnung durch den Ausdruck

$$(3) \quad x_1^3 \Lambda^{(3)}(u_3)$$

gegeben sind. In (53) bezeichnet $\Lambda^{(3)}(u_3)$ den Wert, den man erhält, wenn man in $\Lambda^{(3)}$ für ζ einfach u_3 setzt.

Eine für das Eintreten des Minimums notwendige Bedingung ist somit anforderbar

$$(4) \quad \Lambda^{(3)}(u_3) = 0.$$

Es sei insbesondere

$$(5) \quad \mathbf{A} = \int_S R^2 u_3 d\sigma = 0.$$

Unter der Bedingung (54) können wir jetzt eine andere Form erteilen. Aus der Formel (23) IV folgt, wie man sich durch direktes Ausrechnen leicht überzeugt,

$$\begin{aligned} \Lambda^{(3)}(u_3) &= -\frac{2}{3} \frac{\omega^2}{f\kappa} \int_S R \tau E_1 u_3^2 d\sigma - \frac{2}{3} \int_S E_1 u_3^2 \frac{\partial}{\partial \nu} W(\xi, \eta, 0) d\sigma \\ &\quad - \frac{2}{3} \iint_S E_1 u_3 u_3' d\sigma d\sigma' - \frac{\omega^2}{3f\kappa} \int_S u_3^3 (a^2 + b^2) d\sigma - \frac{2}{3} \iint_S u_3 U^{(2)}(u_3) d\sigma \\ &\quad - \frac{2}{3} \int_S E_1 u_3 \left(\psi u_3 + \int_S \frac{u_3'}{\varrho} d\sigma' \right) d\sigma - \frac{\omega^2}{3f\kappa} \int_S u_3^3 (a^2 + b^2) d\sigma - \frac{2}{3} \iint_S u_3 U^{(2)}(u_3) d\sigma \\ &= -\frac{\omega^2}{3f\kappa} \int_S u_3^3 (a^2 + b^2) d\sigma - \frac{2}{3} \iint_S u_3 U^{(2)}(u_3) d\sigma. \end{aligned}$$

Betrachten wir jetzt die Integro-Differentialgleichung (73) III. Wie § 5 III wird $s=0$ gesetzt. Es ist nicht schwer den Ausdruck B_{02} in (2) III zu ermitteln.

Hierzu bestimmen wir diejenigen Glieder der Lösung von (73) III, die von der Form $\text{Const. } r_3^2$ sind. Man findet ohne wesentliche Schwierigkeiten hierfür der Ausdruck

$$(7) \quad -\frac{\omega^2}{2\kappa f} (a^2 + b^2) \frac{r_3^2}{\psi} u_3^2 - \frac{1}{\psi} U^{(2)}(u_3) r_3^2 - \int_S H_1 \left[\frac{\omega^2}{2\kappa f} (a'^2 + b'^2) \frac{r_3^2}{\psi'} u_3'^2 - \frac{1}{\psi'} U^{(2)}(u_3') r_3'^2 \right] d\sigma'.$$

Für B_{02} ergibt sich hieraus die Formel

$$(8) \quad B_{02} = \frac{\omega^2}{2\kappa f} \int_S (a^2 + b^2) u_3^3 d\sigma + \int_S U^{(2)}(u_3) u_3 d\sigma.$$

Aus (56) und (57) folgt jetzt

$$(59) \quad \Lambda^{(8)}(u_s) = -\frac{2}{3} B_{02}.$$

Die zuletzt gefundene notwendige Bedingung kann also auf die Form

$$(60) \quad B_{02} = 0$$

gebracht werden.

Wie wir in § 5 des dritten Kapitels gesehen haben, gehört T , wenn etwa $B_{11} \neq 0$, $B_{20} \neq 0$ ist, einer regulären Reihe von Gleichgewichtsfiguren an; darüber hinaus gehen von T zwei weitere nicht reguläre Arme von Gleichgewichtsfiguren aus.

Sechstes Kapitel.

Anwendungen.

§ 1.

Ein von Laplace behandeltes Problem der Gleichgewichtsverteilung.

1. Sei T_0 eine starre homogene Kugel vom Halbmesser r_0 ; ihre Dichte heiße f_0 . Über T_0 sei eine zusammenhängende Schicht $T - T_0$ einer homogenen Flüssigkeit der Dichte f ausgebreitet⁸⁶). Als zusätzliches Feld $\kappa f \Gamma$ kann hier das Gravitationsfeld einer von S_0 umschlossenen Masse der Dichte $f_0 - f$ angesehen werden. Im Ruhezustande ($\omega = 0$) ist offenbar das System im Gleichgewicht, wenn auch S eine Kugel ist. *Welches sind die Gleichgewichtsfiguren T_1 für kleine Werte der Winkelgeschwindigkeit ω_1 und demnach auch von $\lambda = \frac{\omega_1^2}{2\kappa f}$?*⁸⁷)

Die Radien der beiden Kugeln seien r_0 und r . Wie man leicht findet, ist die Schwerkraft auf S

$$(1) \quad \kappa f \psi = -\frac{4\pi\kappa f}{3r^2} \left(r^3 + r_0^3 \frac{f_0 - f}{f} \right).$$

Es gilt ferner

$$(2) \quad \Gamma = \frac{4}{3} \pi r_0^3 \frac{1}{r + \zeta} \frac{f_0 - f}{f}.$$

⁸⁶) Durch die folgenden Betrachtungen wird auch der Fall, daß $f_0 - f < 0$ ausfällt, mit umfaßt.

⁸⁷) Mit dem besonderen Falle eines ruhenden Systems, $\lambda = 0$, hat sich in Durchführung älterer Untersuchungen von Laplace (Traité de Mécanique céleste, Tome second, Livre III, p. 82–87) Poincaré beschäftigt. Vgl. H. Poincaré, loc. cit. ¹⁰) S. 290–293. Die Überlegungen von Poincaré haben nur einen heuristischen Wert. Das im Text betrachtete Problem ließe sich übrigens durch konsequente Befolgung des von Liapounoff in der in der Fußnote ¹⁰) zitierten Arbeit gewiesenen Weges erledigen.

Die charakteristische Integralgleichung ist jetzt

$$-\frac{4\pi}{3r^3}\left(r^3 + r_0^3 \frac{f_0 - f}{f}\right)\zeta + \int_s \frac{1}{\varrho} \zeta' d\sigma' = 0.$$

Die Eigenwerte der Integralgleichung

$$\zeta - \theta \int_s \frac{1}{\varrho} \zeta' d\sigma' = 0$$

ist bekanntlich in der Formel $\frac{2n+1}{4\pi r}$ ($n = 0, 1, \dots$) enthalten. Der Eigenwert $\frac{2n+1}{4\pi r}$ ist $(2n+1)$ -fach; die zugehörigen Eigenfunktionen sind die allgemeinen Kugelfunktionen n -ter Ordnung. Jedesmal, wenn

$$\frac{3r^3}{4\pi\left(r^3 + r_0^3 \frac{f_0 - f}{f}\right)} = \frac{2n+1}{4\pi r},$$

einmal

$$\frac{r^3}{r^3 + r_0^3 \frac{f_0 - f}{f}} = \frac{2n+1}{3}$$

hat die Integralgleichung (3) von Null verschiedene Lösungen. Ist die Gleichung (6) für keinen Wert von n erfüllt, so liegt der reguläre Fall vor; T gehört einer zweiparametrigen regulären Reihe von Gleichgewichtsfiguren an. Beschränkt man sich mit Laplace und Poincaré auf die Betrachtung des Ruhezustandes, so wird $\lambda = 0$ und die lineare Reihe hängt noch von dem einen Parameter s ab; alle Nachbarfiguren sind Kugeln um den Mittelpunkt von T_0 .

2. Es sei jetzt zunächst $r_0 = 0$, d. h. es liege eine flüssige Vollkugel vor. Dann ist die Gleichung (6) für $n = 1$ erfüllt. Die Integralgleichung (3) hat drei linear unabhängige Lösungen: $\cos \theta = \frac{Z}{r} = \text{Const. } u_1$, $\theta \cos \chi = \frac{X}{r} = \text{Const. } u_3$, $\sin \theta \sin \chi = \frac{Y}{r} = \text{Const. } u_4$, unter θ und χ übergehend Polarkoordinaten auf der Kugel verstanden. Für den Ruhezustand ($\omega = 0$) sind diese Nulllösungen trivial. Sie entsprechen den Translationen in der Richtung der Koordinatenachsen. Man kann sie außer Betracht lassen, da man durch geeignete Translation der Nachbarfiguren erreichen kann, daß $\int_s X \zeta d\sigma = \int_s Y \zeta d\sigma = \int_s Z \zeta d\sigma = 0$ wird. Alle Nachbarfiguren sind Kugeln um den Mittelpunkt von T .

Etwas anders ist die Sachlage, wenn man von T zu einer Nachbarfigur T_1 übergeht, die zu einem von Null verschiedenen Wert von ω gehört. Man kann bekanntlich, wie auch T beschaffen sei, durch eine geeignete Verschiebung der Nachbarfigur parallel zu der z -Achse erreichen,

daß $\int_S \psi \zeta c d\sigma = 0$ wird. Dies besagt offenbar im vorliegenden Falle soviel als

$$(7) \quad \int_S \psi \zeta Z d\sigma = 0.$$

Da T ein Rotationskörper ist, so kann man ferner, wie wir in § 4 I. gesehen haben, durch eine Drehung von T_1 um die z -Achse erzwingen, daß

$$(8) \quad \int_S \psi \zeta u_4 d\sigma = \int_S \psi \zeta Y d\sigma = 0$$

wird. Es ist nicht schwer zu zeigen, daß man durch eine geeignete Schraubung um die z -Achse den beiden Beziehungen (7), (8) zugleich genügen kann:

Wir beweisen, daß für alle reellen Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft von T auch

$$(9) \quad r_3 = - \int_S \psi \zeta u_3 d\sigma = \text{Const.} \int_S \psi \zeta X d\sigma = 0$$

ist.

Dies sieht man etwa so ein. Es sei T der Ausgang irgendeiner linearen Reihe von Gleichgewichtsfiguren. Wie wir wissen, liegt der Schwerpunkt einer nur der Eigengravitation ausgesetzten Gleichgewichtsfigur stets auf der Rotationsachse. Darum ist für alle hinreichend kleinen Werte von $|\lambda|$

$$\int_S \zeta X d\sigma + \dots = 0,$$

wo die nicht hingeschriebenen Glieder von zweiter und höherer Ordnung sind. Demnach ist $r_3 = - \int_S \psi \zeta u_3 d\sigma$ gewiß von zweiter oder höherer Ordnung in bezug auf ζ und $D_1 \zeta$.

Hieraus folgt, daß zu den dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen reellen Werten von λ und s nicht mehr als eine Gleichgewichtsfigur in der Nachbarschaft von T gehören kann. Wäre nämlich ζ eine andere Figur, so wäre in der Bezeichnungsweise des § 5 III

$$(10) \quad |r_3 - r_3| < \text{Const. } \varepsilon_2 \Omega,$$

so daß in der Tat $r_3 = r_3$, $\zeta \equiv \zeta$ ausfallen würde.

Die Maclaurinschen Ellipsoide stellen darum die einzige reelle Reihe von Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der Kugel dar⁸⁸⁾. Offenbar ist tatsächlich $r_3 = 0$.

⁸⁸⁾ Sie finden ihre Fortsetzung in einer Schar verlängerter Rotationsellipsoide, die zu den Werten $\lambda < 0$ gehören. Diese Ellipsoide entsprechen den von dem Potential $-\frac{\omega^2 R^3}{2}$ herrührenden Zentripetalkräften.

Die Kugel ist eine stabile Gleichgewichtsfigur⁸⁹⁾). Man überzeugt sich hiervon, wenn man die charakteristische Integralgleichung betrachtet. Der kleinste Eigenwert der Integralgleichung

$$*) \quad -\frac{4\pi r}{3}\zeta + r \int_S \frac{1}{\varrho} \zeta' d\sigma' = 0$$

gleich $\frac{1}{3}$, die zugehörige Eigenfunktion ist auf S konstant. Der nächst größere Eigenwert ist, wie wir sahen, gleich 1, die zugehörigen normierten Eigenfunktionen sind proportional zu X, Y, Z . Wir setzen

$$1) \quad \eta = \alpha^{(1)}, \quad f_1 = \alpha^{(2)} X, \quad f_2 = \alpha^{(3)} Y \\ (\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \alpha^{(3)} \text{ konstant}).$$

Die Funktion $\mathfrak{z}$ wird, da ψ auf S konstant ist, den Bedingungen

$$2) \quad \int_S \mathfrak{z} d\sigma = 0, \quad \int_S \mathfrak{z} X d\sigma = 0, \quad \int_S \mathfrak{z} Y d\sigma = 0, \quad \int_S \mathfrak{z} Z d\sigma = 0$$

erworfen. Da die Winkelgeschwindigkeit $\omega = 0$ ist, so ist jetzt

$$3) \quad \Lambda_1 - \Lambda = - \int_S \psi \zeta^2 d\sigma - \int_S \int_S \frac{1}{\varrho} \zeta \zeta' d\sigma d\sigma' + K^*,$$

$$4) \quad |K^*| < \beta^{(33)} N \int_S \zeta^2 d\sigma.$$

Aus (128) IV folgt mit Rücksicht auf (12)

$$5) \quad \zeta = \mathfrak{z} + \dots,$$

so die nicht hingeschriebenen Glieder von zweiter oder höherer Ordnung sind. Wir finden darum

$$6) \quad \Lambda_1 - \Lambda = - \int_S \psi \mathfrak{z}^2 d\sigma - \int_S \int_S \frac{1}{\varrho} \mathfrak{z} \mathfrak{z}' d\sigma d\sigma' + K^*,$$

$$7) \quad |\bar{K}^*| < \beta^{(33)} \mathfrak{N} \int_S \mathfrak{z}^2 d\sigma$$

und wegen (12)

$$8) \quad \Lambda_1 - \Lambda = \sum'' \left(1 - \frac{1}{\nu_n}\right) \left(\int_S \psi \mathfrak{z} u^{(n)} d\sigma\right)^2 + \bar{K}^*,$$

so durch das Zeichen $\sum''$ angedeutet werden soll, daß die beiden kleinsten Eigenwerte $\frac{1}{3}$ und 1 außer Betracht bleiben. Augenscheinlich ist, außer $\mathfrak{z} \equiv 0$, $\Lambda_1 - \Lambda > 0$. Durch die zuletzt durchgeführten Betrachtungen ist gezeigt, daß unter allen Körpern gleichen Volumens in der

⁸⁹⁾ Vgl. A. Liapounoff, loc. cit. ¹⁹⁾ S. 74–77.

Umgebung erster Ordnung der Kugel, deren Schwerpunkt im Kugelmittelpunkt liegt, die Kugel den kleinsten Wert der Gravitationsenergie besitzt. Die die Lage des Schwerpunktes betreffende Einschränkung ist übrigens unwesentlich, da die Gravitationsenergie bei einer Translation unverändert bleibt⁹⁰⁾.

3. Es sei jetzt $r_0 > 0$. Man kann die Gleichung (6) zunächst dadurch erfüllen, daß man

$$(19) \quad n = 0 \quad \text{und} \quad f_0 = \left(1 + 2 \frac{r^2}{r_0^2}\right) f$$

annimmt.

Der Eigenwert 1 von (4) ist einfach. Die zugehörige, in bekannter Weise normierte Eigenfunktion, sie heiße $\hat{u}$, ist auf S konstant.

Aus (1) und (19) folgt vor allem

$$(20) \quad \psi = -4\pi r.$$

Wie man sich ferner leicht überzeugt, ist

$$(21) \quad \hat{u} = \frac{1}{4\pi r^{\frac{3}{2}}}.$$

Es gilt weiter

$$(22) \quad \hat{r} = - \int_S \psi \zeta \hat{u} d\sigma = - \psi \hat{u} \int_S \zeta d\sigma = \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}} \int_S \zeta d\sigma.$$

Sei v_0 das Volumen der Flüssigkeitsschicht $T - T_0$.

Es ist leicht zu zeigen, daß es nicht mehr als eine reelle Gleichgewichtsfigur der Flüssigkeit in der Umgebung von T geben kann, deren Volumen v in der Umgebung des Wertes v_0 liegt. Wegen (22) ist nämlich

$$(23) \quad v - v_0 = r^{\frac{1}{2}} \hat{r} + \dots,$$

wo die nicht hingeschriebenen Glieder von zweiter oder höherer Ordnung in bezug auf ζ und $D_1 \zeta$ sind. Gehört zu einer etwa vorhandenen anderen Gleichgewichtsfigur von gleichem Volumen der Wert $\hat{r}'$, so ist die Differenz $\hat{r} - \hat{r}'$ von zweiter oder höherer Ordnung. Den Ergebnissen des § 5 III zufolge ist darum $\hat{r} = \hat{r}'$, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

⁹⁰⁾ Wie von Liapounoff und neuerdings auf einem ganz anderen Wege von Herrn T. Carleman gezeigt worden ist, hat die Kugel unter allen Körpern gleichen Volumens, die von einer endlichen Anzahl Stücke analytischer und regulärer Flächen begrenzt sind, die kleinste Gravitationsenergie. Vgl. H. Poincaré, *Figures d'équilibre d'une masse fluide*, Paris 1902, S. 13–24, sowie T. Carleman, *Über eine isoperimetrische Aufgabe und ihre physikalischen Anwendungen*, *Math. Zeitschrift*, 3 (1919) S. 1–7.

Für den Ruhezustand ($\omega_1 = 0$, $\lambda = 0$) sind offenbar die einzigen Gleichgewichtsfiguren Kugeln um den Koordinatenursprung.

Es sei jetzt $\lambda > 0$. Es handelt sich um die Gleichgewichtsfigur einer langsamer Rotation begriffenen Flüssigkeitsschicht in der Umgebung einer Kugel T vom Radius r , die einen kugelförmigen Kern vom Radius $\leq r$ allseitig umgibt. Es ist $f_0 = (1 + 2 \frac{r^3}{r_0^3}) f$.

Wie wir soeben gesehen haben, kann es nicht mehr als eine reelle Gleichgewichtsfigur der Flüssigkeit in der Umgebung von T geben, deren Volumen v in der Umgebung von v_0 liegt. Die Betrachtung der fundamentalen Integro-Differentialgleichung des Problems lehrt, wie sich gleich zeigen wird, daß das Problem tatsächlich eine Lösung hat.

Die fundamentale Integro-Differentialgleichung lautet jetzt

$$\begin{aligned} \psi \zeta + \int_S \hat{N} \zeta' d\sigma' &= s - R^2 \lambda - 2 R \tau \lambda \zeta \\ &+ \hat{r} \psi \hat{u} - (a^2 + b^2) \lambda \zeta^2 - U^{(2)} - U^{(3)} - \dots - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 I'}{\partial r^2} \zeta^2 - \dots, \\ \hat{N} &= \frac{1}{\psi} - \psi \psi' \hat{u} \hat{u}'. \end{aligned}$$

Sei $\hat{H}$ der zu $\frac{1}{\psi} \hat{N}$ gehörige lösende Kern. Die Glieder erster Ordnung der Entwicklung von ζ sind leicht zu bestimmen. Man findet wegen

$$\int_S \hat{H} \hat{u}' d\sigma' = \frac{1}{4\pi r^{\frac{3}{2}}} \int_S \hat{H} d\sigma' = 0,$$

$$\int_S \hat{H} \frac{s}{\psi'} d\sigma' = 0,$$

$$\zeta = \frac{s}{\psi} + \hat{r} \hat{u} - \frac{1}{\psi} R^2 \lambda + \lambda \int_S \hat{H} \frac{R'^2}{\psi'} d\sigma' + \dots$$

Die Verzweigungsgleichung ist, wie man sich leicht überzeugt, (25)

$$\hat{r} = - \int_S \psi \zeta \hat{u} d\sigma = \frac{1}{\psi^{\frac{1}{2}}} \int_S \zeta d\sigma = - \frac{4\pi r^{\frac{3}{2}} s}{4\pi r^{\frac{3}{2}}} + \hat{r} + \frac{\lambda}{4\pi r^{\frac{3}{2}}} \int_S R^2 d\sigma + \dots$$

Sie ergibt augenscheinlich

$$s = \frac{\lambda}{4\pi r^{\frac{3}{2}}} \int_S R^2 d\sigma + \dots,$$

die nicht hingeschriebenen Glieder höherer Ordnung von $\hat{r}$ und λ abhängen. Aus (27) und (29) folgt

$$\zeta = \hat{r} \hat{u} + \lambda \left[\frac{R^2}{4\pi r} - \frac{1}{4\pi r} \int_S \hat{H} R'^2 d\sigma' - \frac{1}{16\pi^2 r^3} \int_S R^2 d\sigma \right] + \dots$$

Die Konstante $\hat{r}$ bestimmt sich aus der Forderung, daß das Volumen der Flüssigkeit einen vorgeschriebenen Wert v hat. Es gilt

$$(31) \quad v = v_0 + \int_S \zeta d\sigma + \dots,$$

demnach wegen (30) und (25)

$$(32) \quad v - v_0 = \hat{r} r^{\frac{1}{2}} + \lambda \left[\frac{1}{4\pi r} \int_S R^2 d\sigma - \frac{4\pi r^3}{16\pi^2 r^3} \int_S R^2 d\sigma \right] + \dots$$

somit

$$(33) \quad \hat{r} = \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}} (v - v_0) + \dots$$

im Einklang mit der Formel (23). Hiermit ist die Bestimmung der neuer Gleichgewichtsfigur vollendet.

Die Gleichgewichtsfigur T ist stabil. Der Beweis läßt sich ganz wie vorhin führen.

Der kleinste Eigenwert der charakteristischen Integralgleichung

$$(34) \quad -4\pi r \zeta + v \int_S \frac{1}{\varrho} \zeta' d\sigma' = 0$$

ist gleich 1; die zugehörige normierte Eigenfunktion ist gleich $\hat{u}$. Der nächstgrößere Eigenwert ist gleich 3; die zugehörigen Eigenfunktionen sind den Funktionen X, Y, Z proportional.

Es gelten unverändert die Formeln (11) bis (17); im vorliegenden Falle kann man $\alpha^{(1)} = \hat{u}$ setzen. Es gilt ferner die Formel (18), in der durch das Zeichen $\sum''$ ausgedrückt werden soll, daß die Eigenfunktionen 1 und 3 außer Betracht bleiben. Augenscheinlich ist, außer für $\beta \equiv 0$, $\Lambda_1 - \Lambda > 0$. Man sieht überdies leicht ein, daß das Gleichgewicht stabil bleibt, auch wenn man die Voraussetzung, daß der Schwerpunkt der Vergleichsfigur mit demjenigen der Figur T übereinstimmt, fallen läßt⁹¹⁾.

4. Es sei jetzt endlich $n \neq 0$, $f_0 \neq f$. Die Gleichung (6) kann man erfüllen, wenn man

$$(35) \quad f_0 = f \left\{ 1 + \frac{2(1-n)}{2n+1} \frac{r^3}{r_0^3} \right\}, \quad (n = 2, 3, \dots)$$

setzt. Augenscheinlich ist jetzt $f_0 < f$, die Flüssigkeit ist dichter als der Kern. Bei vorgegebenem Verhältnis $\frac{r}{r_0} > 1$ gibt es nur endlich viele Werte von n , so daß $f_0 > 0$ ausfällt. Die Gleichgewichtsfigur T ist eine

⁹¹⁾ Dieses Resultat ist als ein besonderer Fall in einem allgemeinen Satz über das Minimum der Gravitationsenergie gewisser nicht homogener Flüssigkeitsfiguren enthalten. Vgl. L. Lichtenstein, Über ein isoperimetrisches Problem der mathematischen Physik, Math. Zeitschr., 3 (1919), S. 8–10.

erzweigungsfigur. Ob es für den Ruhezustand ($\lambda = 0$) in der Nachbarschaft von T , wie dies von Laplace und Poincaré behauptet worden ist, tatsächlich Gleichgewichtsfiguren gibt, die von einer zu S_0 konzentrischen Kugel verschieden sind, kann erst eine nähere Untersuchung der Verweigungsgleichung lehren.

Wie man leicht sieht, sind jedenfalls sowohl T als auch die etwaigen neuen Gleichgewichtsfiguren labil⁹¹⁾.

§ 2.

Maclaurinsche und Jacobische Ellipsoide.

An das vorhin betrachtete Anwendungsbeispiel wollen wir jetzt einige Bemerkungen über die ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren anschließen und ihre bekannten Eigenschaften vom Standpunkte der allgemeinen Theorie beleuchten.

1. Es sei T ein Flüssigkeitsellipsoid mit den Halbachsen $\mathbf{v}$, $\sqrt{\mathbf{v}^2 - \mathbf{p}^2}$, $\sqrt{\mathbf{v}^2 - \mathbf{q}^2}$ ($0 \leq \mathbf{p}^2 < \mathbf{q}^2$). Wie man weiß, ist das Gravitationspotential im Innern von T von der Form

$$(36) \quad V(x, y, z) = p_1 x^2 + p_2 y^2 + p_3 z^2 + p_4$$

($p_1 < 0, p_2 < 0, p_3 < 0, p_4$ konstant.)

Es ist demnach

$$(37) \quad V(x, y, z) + \frac{\omega^2}{2\pi f} (x^2 + y^2) \\ = \left(p_1 + \frac{\omega^2}{2\pi f}\right) x^2 + \left(p_2 + \frac{\omega^2}{2\pi f}\right) y^2 + p_3 z^2 + p_4.$$

Die Bedingung, daß (37) auf S konstant sein soll, liefert zur Bestimmung der Achsenverhältnisse $\frac{\sqrt{\mathbf{v}^2 - \mathbf{p}^2}}{\mathbf{v}}, \frac{\sqrt{\mathbf{v}^2 - \mathbf{q}^2}}{\mathbf{v}}$ zwei Gleichungen. Diese kann man zunächst erfüllen, indem man $\mathbf{p}^2 = 0$ annimmt und $\frac{\mathbf{q}^2}{\mathbf{v}^2}$ als Funktion von ω bestimmt. Für alle $\omega < [0,2247 \cdot 2\pi \kappa f]^{\frac{1}{2}} = \Omega''$ ergeben die Bedingungsgleichungen zwei positive Werte von $\frac{\mathbf{q}^2}{\mathbf{v}^2}$, d. h. zwei Maclaurinsche Ellipsoide. Darüber hinaus gehört zu jedem Werte $\omega < [0,1871 \cdot 2\pi \kappa f]^{\frac{1}{2}} = \Omega'$ ein System positiver $\frac{\mathbf{p}^2}{\mathbf{v}^2}$ und $\frac{\mathbf{q}^2}{\mathbf{v}^2}$, d. h. ein Jacobisches Ellipsoid.

Für die Schwerkraft $\kappa f \psi$ auf S gilt, wie man leicht findet, die Formel

$$(38) \quad \kappa f \psi \equiv 2p_3 (\mathbf{v}^2 - \mathbf{q}^2) \frac{1}{l},$$

unter l den Abstand der Tangentialebene im Punkte X, Y, Z auf S vom Koordinatenursprung verstanden.

Aus (37) folgt nämlich

$$(39) \quad \kappa f \psi = - \sqrt{\left(2p_1 + \frac{\omega^2}{\kappa f}\right)^2 X^2 + \left(2p_2 + \frac{\omega^2}{\kappa f}\right)^2 Y^2 + (2p_3 Z)^2}.$$

Da nun

$$(40) \quad 2p_1 + \frac{\omega^2}{\kappa f} : 2p_2 + \frac{\omega^2}{\kappa f} : 2p_3 = \frac{1}{v^2} : \frac{1}{v^2 - p^2} : \frac{1}{v^2 - q^2}$$

gilt, so ist

$$(41) \quad \kappa f \psi = - \sqrt{X^2 \left[\frac{2p_1}{v^2} (v^2 - q^2) \right]^2 + Y^2 \left[\frac{2p_2}{v^2 - p^2} (v^2 - q^2) \right]^2 + [2p_3 Z]^2},$$

darum

$$(42) \quad \begin{aligned} \kappa f \psi &= 2p_3 (v^2 - q^2) \sqrt{\frac{X^2}{v^4} + \frac{Y^2}{(v^2 - p^2)^2} + \frac{Z^2}{(v^2 - q^2)^2}} \\ &= 2p_3 (v^2 - q^2) \frac{1}{l}. \end{aligned} \quad (p_3 < 0)$$

Betrachten wir jetzt die Integralgleichung

$$(43) \quad \psi \zeta + \nu \int_S \frac{\zeta'}{e} d\sigma' = 0.$$

Bekanntlich ist die Dichte einer elektrischen Ladung, die sich auf dem in einem unendlichen Raume isoliert gedachten Ellipsoid im Gleichgewicht befindet, gleich Const. l . Es ist also

$$(44) \quad \int_S \frac{l' d\sigma'}{e} = \text{Const.}$$

Hieraus und aus (38) folgt, daß l eine Eigenfunktion der Integralgleichung (43) darstellt. Ist u_* eine beliebige von l verschiedene Eigenfunktion, so ist

$$(45) \quad \int_S \psi l u_* d\sigma = 0,$$

mithin wegen (38)

$$(46) \quad \int_S u_* d\sigma = 0.$$

Dieser Beziehung genügen demnach insbesondere alle trivialen und etwa vorhandenen nicht trivialen Lösungen der Integralgleichung

$$(47) \quad \psi \zeta + \int_S \frac{\zeta'}{e} d\sigma' = 0$$

im Einklang mit den allgemeinen Ergebnissen des § 1 des zweiten und des § 5 des dritten Kapitels.

Aus der Theorie der induzierten Magnetisierung folgt, daß das Potential eines in der Richtung der x -Achse gleichmäßig polarisierten

soids in seinem Innern gleich $\text{Const. } x$ ist⁹³⁾. Mit anderen Worten, das Potential einer auf S ausgebreiteten einfachen Belegung von der Dichte $a = \frac{Xl}{v^2}$ auf S gleich $\text{Const. } X$ ⁹⁴⁾. Es gilt demnach

$$X + \text{Const.} \int_S \frac{X' l'}{e} d\sigma' = 0.$$

Die Funktion lX ist demnach eine Eigenfunktion der Integralgleichung (43); ${}^1\nu$ sei der zugehörige Eigenwert. In analoger Weise setzt man, daß auch lY und lZ Eigenfunktionen sind. Die zugehörigen Eigenwerte heißen ${}^2\nu$ und ${}^3\nu$.

Die Eigenfunktionen der Integralgleichung (43) hängen mit den räumlichen Funktionen eng zusammen⁹⁵⁾. Aus der Theorie dieser Funktionen folgt insbesondere, daß auch XYl eine Eigenfunktion ist. Der zugehörige Eigenwert heiße ${}^4\nu$.

Ist T eine Gleichgewichtsfigur, so muß (47) die beiden (normierten) trivialen Nulllösungen u_1 und u_2 haben. Im vorliegenden Falle ist

$$u_1 = q_1 c = q_1 \frac{Zl}{v^2 - q^2} = q'_1 Zl \quad (q_1, q'_1 \text{ konstant}),$$

$$u_2 = q_2 R \cos p = q_2 XYl \left(\frac{1}{v^2 - p^2} - \frac{1}{v^2} \right) = q'_2 XYl \quad (q_2, q'_2 \text{ konstant})$$

l. § 1 des zweiten Kapitels).

Ist T ein Rotationsellipsoid, so ist $p^2 = 0$; hier ist $u_2 \equiv 0$ zu setzen. Ist $p^2 \neq 0$, d. h. handelt es sich um ein dreiachsiges Ellipsoid, müssen die Eigenwerte ${}^3\nu$ und ${}^4\nu$ gleich 1 sein. Liegt ein Maclaurin-ellipsoid vor, so muß ${}^3\nu = 1$ sein. Die Beziehungen ${}^3\nu = 1$, ${}^4\nu = 1$ für dreiachsige, ${}^3\nu = 1$ bei Rotationsellipsoiden sind offenbar erfüllt, wenn die Beziehungen, die zwischen den Halbachsen und der Winkelgeschwindigkeit bestehen.

2. Sei jetzt das Volumen der Flüssigkeitsmasse vorgegeben und etwa gleich 1. Wie Liapounoff und Poincaré bewiesen haben, gibt es, sowohl bei den Maclaurinschen als auch bei Jacobischen Ellipsoiden, abhängerig unendlich viele singuläre Werte von ω derart, daß die Integralgleichung (47) nicht triviale Nulllösungen hat⁹⁶⁾. Ist T ein Jacobisches

⁹³⁾ Vgl. z. B. E. Cohn, „Das elektromagnetische Feld“, Leipzig 1900, S. 211.

⁹⁴⁾ Es sei daran erinnert, daß a, b, c die Richtungskosinus der Normale (ν) bezeichnen. Es ist

$$a = \frac{X}{v^2} l, \quad b = \frac{Y}{v^2 - p^2} l, \quad c = \frac{Z}{v^2 - q^2} l.$$

⁹⁵⁾ Vgl. z. B. A. Liapounoff, loc. cit. Abh. I ¹⁰⁾ unter 1. und 5. passim.

⁹⁶⁾ Liapounoff geht bei seinen Betrachtungen (loc. cit. ⁹⁵⁾) von einem beliebigen System krummliniger Koordinaten ξ, η, ζ aus und kommt darum zu einer

Ellipsoid, so liegt allemal eine einzige nicht triviale Nulllösung u_3 vor, die in bezug auf die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ symmetrisch. Bei den Maclaurinschen Ellipsoiden gibt es im Einklang mit den allgemeinen Ergebnissen des zweiten Kapitels entweder eine einzige nicht triviale Nulllösung von der Form $u_3 = \mathfrak{F}_1(\mathfrak{z})$, oder es hat (47) zwei nicht triviale Nulllösungen:

$$u_3 = \mathfrak{F}_1(\mathfrak{z}) \cos k\delta, \quad u_4 = \mathfrak{F}_1(\mathfrak{z}) \sin k\delta \quad (k \text{ eine ganze Zahl}).$$

Es sei T irgendein Maclaurinsches Ellipsoid, das Verzweigungsfigur ist. Der Ausdruck $A = \int_S R^2 u_3 d\sigma$ ist nur bei demjenigen Ellipsoid T von Null verschieden, der dem Maximalwert der Winkelgeschwindigkeit entspricht. In der Tat ist, wie sich zeigen läßt, der Ausdruck $u^{(n)} = R^n$ eine Eigenfunktion der Integralgleichung (43), so daß

$$(51) \quad \int_S \psi u^{(n)} u^{(n)} d\sigma = 0 \quad (n \neq 0)$$

gilt⁹⁷⁾. Für (51) kann man wegen $u^{(0)} = R^2 l$ und wegen (38) setzen

$$(52) \quad \int_S R^2 u^{(n)} d\sigma = 0 \quad (n \neq 0)$$

Für das Ellipsoid T_0 und nur für dieses ist $u_3 = u^{(0)}$, darum

$$A = \int R^2 u_3 d\sigma \neq 0.$$

Von diesem Ellipsoid gehen also zwei nicht reguläre Arme von Gleichgewichtsfiguren aus (vgl. § 5 des dritten Kapitels). Sie gehören beide zu Werten von λ desselben (negativen) Vorzeichens, die Zahl 1 ist also gerade. Darum gehören zu kleinen positiven Werten von λ keine neuen reellen Gleichgewichtsfiguren mehr.

Damit ist die von Tschebyschef gestellte Frage, ob sich an das Ellipsoid T_0 für größere Werte der Winkelgeschwindigkeit weitere Gleichgewichtsfiguren anschließen, im negativen Sinne beantwortet⁹⁸⁾.

Von besonderem Interesse ist dasjenige Maclaurinsche Ellipsoid $T^{(0)}$ an welches sich die lineare Reihe der Jacobischen Ellipsoide anschließt. Die Integralgleichung (47) hat die nicht trivialen normierten Nulllösungen $\text{Const. } l(Y^2 - X^2)$ und $\text{Const. } lXY$. Sie sind von der Form $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{z}) \cos 2\delta$ bzw. $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{z}) \sin 2\delta$. Den allgemeinen Sätzen in § 5 III zufolge gehen von $T^{(0)}$

Integro-Differentialgleichung, die zwar zu der Integro-Differentialgleichung (52) I analog ist, sich aber mit ihr nicht deckt (vgl. Abh. I S. 248–249; dort bezeichnet $d\sigma$ nicht das Flächenelement des Ellipsoids, sondern den Ausdruck $\sin \theta d\theta d\psi$). Man gelangt von der Integralgleichung (1) II zu der entsprechenden Integralgleichung der Liapounoffschen Theorie, wenn man in (1) II für ζ einfach $\zeta \sqrt{H(\varrho, \theta, \psi)}$ in der Liapounoffschen Bezeichnungsweise setzt.

⁹⁷⁾ Vgl. A. Liapounoff, loc. cit.¹⁹⁾ S. 52.

⁹⁸⁾ Vgl. A. Liapounoff, loc. cit. Abh. I ⁴⁾ sowie ¹⁰⁾ unter 7.

zu gleichen Werten von λ gehörende nicht reguläre Reihen von Gleichgewichtsfiguren, die je zwei Symmetrieebenen durch die Rotationsachse und durch Drehung um $\frac{\pi}{2}$ ineinander übergehen. Wie sich zeigen läßt, ist hier nämlich $B_{03} = 0$, $B_{11} \neq 0$. (Vgl. Liapounoff, loc. cit. n. I¹⁰) unter 1. S. 201–210.). Es sind dies die Jacobischen Ellippsoiden^{10a)}. Wie wir vorhin gesehen haben, ist für diese die mit u_3 bezeichnete axiale Nulllösung gleich $\text{Const. } lXY$. Im Einklang mit den allgemeinen Sätzen des § 5 III konvergiert u_3 beim Übergang zu $T^{(0)}$ gegen $(\bar{s}) \sin 2b$.

Sei $\Omega''' < \Omega'$ der größte aller derjenigen Werte der Winkelgeschwindigkeit ω , denen dreiachsige Verzweigungsellipsoide entsprechen. Das zugehörige Verzweigungsellipsoid $T^{(b)}$ bildet den Ausgangskörper einer linearen Reihe „birnenförmiger“ Gleichgewichtsfiguren.

3. Nun noch einige Bemerkungen zur Frage der Stabilität. Wir kehren auf die Betrachtungen des § 7 des vierten Kapitels zurück und erhalten

$$\dot{u} = \frac{1}{\psi} \frac{1}{\sqrt{-\int_s \frac{1}{\psi} d\sigma}}, \quad \dot{f}_1 = X \frac{1}{\psi'} \frac{1}{\sqrt{-X^2 \frac{1}{\psi'} d\sigma}}, \quad \dot{f}_2 = Y \frac{1}{\psi'} \frac{1}{\sqrt{-Y^2 \frac{1}{\psi'} d\sigma}}$$

Die Beziehungen (120) IV bis (124) IV sind dabei augenscheinlich erfüllt. Die Gleichungen (130) IV nehmen jetzt die Form

$$\int_s \bar{s} X d\sigma = 0, \quad \int_s \bar{s} Y d\sigma = 0, \quad \int_s \bar{s} d\sigma = 0$$

Ist T ein dreiachsiges Ellipsoid, so gilt ferner nach (131) IV

$$\int_s \bar{s} Z d\sigma = 0, \quad \int_s \bar{s} XY d\sigma = 0.$$

Ist T ein Maclaurinsches Ellipsoid, so gilt nur die erste der Gleichungen (55); die zweite kann durch eine Gleichung von der Form

$$\int_s \psi \bar{s} \mathfrak{F}_1(\bar{s}) \sin kb d\sigma = 0 \quad (k > 1)$$

ersetzt werden, unter $\mathfrak{F}_1(\bar{s}) \sin kb$ eine beliebige etwa vorhandene Eigenfunktion der Integralgleichung (1) II von dieser Gestalt verstanden. Die Funktion $\bar{s}$ ist zu den Eigenfunktionen

$$l, lX, lY, lZ, lXY$$

$$l, lX, lY, lZ, \mathfrak{F}_1(\bar{s}) \sin kb$$

hologal.

^{10a)} Wir haben in 1. angenommen, daß die große Achse der Jacobischen Ellipsoide die Richtung der X-Achse hat. Bei der einer der beiden jetzt auftretenden Reihen ist die große Achse längs der Y-Achse orientiert.

Die Gleichungen (128) IV und (129) IV gehen jetzt über in

$$(59) \quad \zeta = \mathfrak{z} + \dots, \quad \mathfrak{z} = \zeta + \dots,$$

wo die nicht hingeschriebenen Glieder von zweiter oder höherer Ordnung sind.

Für $\Lambda_1 - \Lambda$ ergibt sich jetzt der Ausdruck

$$(60) \quad \Lambda_1 - \Lambda = - \int_S \psi \mathfrak{z}^2 d\sigma - \int_S \int_S \frac{\mathfrak{z} \mathfrak{z}'}{\varrho} d\sigma d\sigma' + \frac{\omega^2}{\kappa f J} \left(\int_S R^2 \mathfrak{z} d\sigma \right)^2 + \dots,$$

oder da das Orthogonalsystem der zu (1) II gehörigen Eigenfunktionen abgeschlossen ist, wegen (57) oder (58)

$$(61) \quad \Lambda_1 - \Lambda = \sum^* \left(1 - \frac{1}{\nu^{(n)}} \right) \left(\int_S \psi \mathfrak{z} u^{(n)} d\sigma \right)^2 + \frac{\omega^2}{\kappa f J} \left(\int_S R^2 \mathfrak{z} d\sigma \right)^2 + \dots,$$

wo durch das Zeichen $\sum^*$ angedeutet werden soll, daß die Eigenfunktionen (57) oder (58) außer Betracht bleiben.

Ist T ein Rotationsellipsoid, so ist, wie bereits bemerkt, $R^2 l$ eine Eigenfunktion, $u^{(g)}$. Ist T ein Jacobisches Ellipsoid, so gilt

$$(62) \quad R^2 l = c^{(k_1)} u^{(k_1)} + c^{(k_2)} u^{(k_2)},$$

unter $u^{(k_1)}$ und $u^{(k_2)}$ zwei bestimmte Eigenfunktionen, unter $c^{(k_1)}$, $c^{(k_2)}$ Konstante verstanden⁹⁹⁾. Wir finden darum

$$(63) \quad \frac{\omega^2}{\kappa f J} \left(\int_S R^2 \mathfrak{z} d\sigma \right)^2 = {}^1 c \left(\int_S \psi u^{(g)} \mathfrak{z} d\sigma \right)^2$$

oder

$$(64) \quad \frac{\omega^2}{\kappa f J} \left(\int_S R^2 \mathfrak{z} d\sigma \right)^2 = \left({}^1 c \int_S \psi u^{(k_1)} \mathfrak{z} d\sigma + {}^2 c \int_S \psi u^{(k_2)} \mathfrak{z} d\sigma \right)^2.$$

Bei den Rotationsellipsoiden erscheinen die Glieder zweiter Ordnung in (61) unmittelbar in der Gestalt $\sum_N \nu^{(n)} \left(\int_S \psi \mathfrak{z} u^{(n)} d\sigma \right)^2$. Das Minimum trifft gewiß zu, wenn alle $\nu^{(n)}$ positiv sind. Eine nähere Diskussion zeigt, daß die schwächer abgeplatteten Maclaurinschen Ellipsoide für $\omega < \Omega$ stabil, alle anderen labil sind. Was die Jacobischen Ellipsoide betrifft, so muß man hier vor der Diskussion der Formel (61) eine nahe liegende Transformation der von $u^{(k_1)}$ und $u^{(k_2)}$ abhängigen Glieder vornehmen. Die Reihe der Jacobischen Ellipsoide ist für $\omega > \Omega'''$ stabil.

⁹⁹⁾ Vg. A. Liapounoff, loc. cit. ¹⁰⁾ S. 52.

ir $\omega < \Omega'''$ labil¹⁰⁰). Die Untersuchung der Stabilität der Verzweigungs-ellipsoide $T^{(0)}$ und $T^{(b)}$ erfordert besondere Betrachtungen; sie ist von Liapounoff durchgeführt worden¹⁰¹). Das Ellipsoid $T^{(0)}$ ist stabil, $T^{(b)}$ nach Liapounoff labil. Das gleiche gilt nach Liapounoff für die birnenförmigen Figuren in der Nachbarschaft von $T^{(b)}$ ¹⁰²). *Die Bestimmung des Stabilitätscharakters der birnenförmigen Gleichgewichtsfiguren lasse sich übrigens nach dem in dem fünften Kapitel auseinandergesetzten Verfahren durchführen.*

Berlin, den 26. September 1919.

¹⁰⁰) Vgl. A. Liapounoff, loc. cit.¹⁹) S. 54–66. Das von Liapounoff eingeschlagene Verfahren ist von dem in den obigen Zeilen angedeuteten verschieden vgl. die Einleitung).

¹⁰¹) Vgl. A. Liapounoff, loc. cit.¹⁹) S. 60–123.

¹⁰²) Vgl. A. Liapounoff, loc. cit.¹⁹) S. 123–132.

(Eingegangen am 26. September 1919.)

Über einen von Herrn L. Lichtenstein benutzten Integralsatz.

Von

I. Schur in Berlin.

In der vorstehenden Arbeit¹⁾ macht Herr Lichtenstein von folgendem Satze Gebrauch, der mit Hilfe der Potentialtheorie bewiesen wird:

Es sei S eine geschlossene Fläche, die man etwa als stetig gekrümmt voraussetzen kann, und es bedeute ϱ den Abstand zweier Punkte σ und σ' auf S . Versteht man unter $d\sigma$ und $d\sigma'$ die zu σ und σ' gehörenden Oberflächenelemente, so sind die Eigenwerte ν der linearen homogenen Integralgleichung

$$\zeta(\sigma) = \nu \int_S \frac{\zeta(\sigma')}{\varrho} d\sigma'$$

sämtlich positiv. Genauer ist der Kern $\frac{1}{\varrho}$ für die Fläche S im Hilbertschen Sinne positiv definit und abgeschlossen, d. h. es ist für jede auf S definierte stetige Funktion $\zeta = \zeta(\sigma)$, die nicht identisch verschwindet, stets

$$J = \iint_S \frac{\zeta \zeta'}{\varrho} d\sigma d\sigma' > 0 \quad (\zeta' = \zeta(\sigma')).$$

Für diesen bemerkenswerten Satz will ich im folgenden einen direkten Beweis angeben, aus dem sogar noch etwas mehr hervorgeht:

Setzt man für $\varepsilon > 0$

$$J(\varepsilon) = \iint_S \frac{\zeta \zeta'}{\sqrt{\varrho^2 + \varepsilon}} d\sigma d\sigma',$$

so ist, sobald die stetige Funktion ζ nicht identisch verschwindet,

$$J > J(\varepsilon) > 0.$$

¹⁾ Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen. Zweite Abhandlung. Stabilitätsbetrachtungen. Math. Zeitschrift, 5 (1919), S. 126–231, insb. S. 151–153.

Da offenbar $J = \lim_{\eta \rightarrow 0} J(\eta)$ ist, so brauchen wir nur nachzuweisen, für $0 < \eta < \varepsilon$

$$J(\eta) > J(\varepsilon) > 0$$

Der Beweis beruht auf der bekannten Formel

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-at^2} dt \quad (a > 0).$$

Es folgt, wenn

$$F(t) = \iint_S e^{-t^2 \zeta^2} \zeta^2 d\sigma d\sigma'$$

gesetzt wird,

$$J(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon t^2} F(t) dt, \quad J(\eta) - J(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} (e^{-t^2} - e^{-\varepsilon t^2}) F(t) dt.$$

Daß die hierbei vorgenommene Vertauschung der Integrationsfolge $\varepsilon > \eta > 0$ zulässig ist, liegt auf der Hand. Die Ungleichungen (1) sind nun gewiß richtig, wenn wir nachweisen können, daß $F(t) \geq 0$ ist und für einen positiven Wert von t nur dann Null ist, wenn ζ identisch Null ist. Hierzu genügt es aber, wenn x, y, z und x', y', z' die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte σ und σ' sind, $e^{-t^2 \zeta^2}$ in der Form

$$e^{-t^2 \zeta^2} = e^{-(x^2 + y^2 + z^2)t^2} e^{-(x'^2 + y'^2 + z'^2)t^2} \sum_{\alpha, \beta, \gamma}^{\infty} \frac{x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} \cdot x'^{\alpha} y'^{\beta} z'^{\gamma}}{\alpha! \beta! \gamma!} (2t^2)^{\alpha + \beta + \gamma}$$

schreiben. Setzt man

$$e^{-(x^2 + y^2 + z^2)t^2} \zeta^2(\sigma) = \chi(\sigma),$$

so folgt hieraus

$$F(t) = \sum_{\alpha, \beta, \gamma}^{\infty} \frac{(2t^2)^{\alpha + \beta + \gamma}}{\alpha! \beta! \gamma!} \left\{ \int_S x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} \chi(\sigma) d\sigma \right\}^2.$$

Dies setzt in Evidenz, daß $F(t) \geq 0$ ist. Soll ferner für ein festes positives t der Ausdruck $F(t)$ gleich Null sein, so muß jedes der Integrale

$$\int_S x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} \chi(\sigma) d\sigma \quad (\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, \dots)$$

verschwinden. Dies kann aber nur dann eintreten, wenn χ oder, was dasselbe ist, ζ identisch Null ist. Um dies zu erkennen, braucht man nur zu beachten, daß die zunächst nur auf der Fläche S erklärte stetige Funktion χ zu einer im ganzen Raum definierten stetigen Funktion $\bar{\chi}$ erweitert werden kann, die auf S mit χ übereinstimmt²⁾, und daß $\bar{\chi}$ in jedem be-

²⁾ Vgl. H. Tietze, Über Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind, Journ. f. Math. 145 (1915), S. 9—14. Einen besonders einfachen Beweis für den hier anzuwendenden Satz des Herrn Tietze hat Herr F. Hausdorff, Über

schränkten räumlichen Bereiche mit beliebiger Genauigkeit durch Polynome in x, y, z approximiert werden kann.

Die hier durchgeführte Betrachtung gilt offenbar auch dann, wenn an Stelle der Oberflächenintegrale Raumintegrale betrachtet werden. Ist also B ein beschränkter (abgeschlossener) räumlicher Bereich und setzt man

$$J(\varepsilon) = \int_B \int_B \frac{\zeta \zeta'}{\sqrt{e^3 + \varepsilon}} dv dv',$$

wo dv und dv' Volumenelemente bedeuten, so gelten wieder die Ungleichungen (1) für jede in B definierte nicht identisch verschwindende stetige Funktion ζ .

Im Anschluß hieran ist noch folgende Bemerkung von Interesse: Ist $K(\sigma, \sigma')$ eine für alle Punkte σ und σ' des räumlichen Bereiches B definierte stetige symmetrische Funktion und weiß man, daß für jede in B definierte stetige Funktion ζ

$$(2) \quad \int_B \int_B K(\sigma, \sigma') \zeta \zeta' dv dv' \geq 0$$

ist, so ist auch für jede in B gelegene geschlossene Fläche S

$$(3) \quad \int_S \int_S K(\sigma, \sigma') \zeta \zeta' d\sigma d\sigma' \geq 0.$$

Denn (2) besagt nur, daß für jedes n und für je n Punkte $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ von B die quadratische Form $\sum_{\alpha, \beta}^n K(\sigma_\alpha, \sigma_\beta) x_\alpha x_\beta$ nicht negativ ist³). Da sich auch das Integral (3) als Grenzwert derartiger quadratischer Formen auffassen läßt, so kann es ebenfalls nie negativ ausfallen.

halbstetige Funktionen und deren Verallgemeinerung, Math. Zeitschrift 5 (1919), S. 292–309 [S. 296], angegeben. — Herr Lichtenstein macht mich darauf aufmerksam, daß dieser Satz in etwas weniger allgemeiner Fassung schon bei H. Lebesgue, Sur le problème de Dirichlet, Rendiconti del Circolo mat. di Palermo, 24 (1907), S. 371–402 [S. 379–380] vorkommt.

³) Vgl. W. H. Young, A note on a class of symmetric functions and on a theorem required in the theory of integral equations, Messenger of Mathematics, Bd. XL (1910), S. 37–43.

(Eingegangen am 26. September 1919.)

Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung.

I. Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Kreisbereiche. Uniformisierung hyperelliptischer Kurven. (Iterationsmethoden).

Von

Paul Koebe in Jena.

Das Problem der konformen Abbildung allgemein begrenzter, mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf *charakteristische Bereiche*, d. s. Bereiche mit charakteristischer Begrenzungsform, die, soweit sie einem bestimmten Typus angehören, eine endlichvielparametrige Mannigfaltigkeit darstellen, ist bereits in den Abhandlungen IV und V behandelt worden¹⁾. In diesen Abhandlungen wurden die Abbildungen auf schlitzförmig begrenzte Bereiche (*Schlitzbereiche*) ausgeführt. Unter den möglichen charakteristischen Bereichen sind die *Kreisbereiche*, d. s. Bereiche, die von lauter Vollkreisen begrenzt sind, dadurch besonders ausgezeichnet, daß sie die kleinstmögliche Parameterzahl aufweisen, so zwar, daß zwei solche Bereiche aufeinander immer nur durch eine lineare Transformation abgebildet werden können, sofern eine solche, immer als eineindeutige Beziehung verstandene Abbildung zweier Kreisbereiche überhaupt besteht. Das hiermit bezeichnete *Problem der Abbildung eines beliebig gegebenen mehrfach zusammenhängenden schlichten Bereiches auf einen Kreisbereich* ist als solches bereits durch ältere Abhandlungen von mir miterledigt worden. Es wird hier einer selbständigen Behandlung unterworfen, wobei der Gesichtspunkt der *rein funktionentheoretischen, potenzreihentheoretischen* Behandlung, der für diese ganze Abhandlungenserie maßgebend sein soll,

¹⁾ Siehe die Literaturangaben in V (Math. Zeitschr. 5 (1918), insbes. S. 199. Siehe ferner die Abhandlung „Über die Strömungspotentiale und die zugehörigen konformen Abbildungen Riemannscher Flächen“ in Gött. Nachr. 1918 und „Begründung der Kontinuitätsmethode (III. Mitteilung)“ ebenda sowie eine spätere Abhandlung in dieser Serie.

leitend ist. Das hier im allgemeinen Falle zur Anwendung kommende *Iterationsverfahren* (fünfter Teil) hat mit dem von mir früher²⁾ eingeschlagenen „iterierenden Verfahren“ den Grundgedanken gemeinschaftlich, durch sukzessive Anwendung von Fundamentalabbildungen einfach zusammenhängender Bereiche den gegebenen mehrfach zusammenhängenden Bereich in einen Bereich mit *immer höherer Spiegelungsfähigkeit* zu verwandeln. In der Grenze ergibt sich ein Bereich von *allseitig unbegrenzter Spiegelungsfähigkeit*, der sich auf Grund dieser Eigenschaft als ein *Kreisbereich* herausstellt.

Eine Sonderbehandlung haben wir dem allgemeinen *dreifach* zusammenhängenden Bereiche und dem *symmetrischen Bereiche beliebig hohen Zusammenhanges* zuteil werden lassen³⁾. Der gegebene dreifach zusammenhängende Bereich wird zunächst durch die Fundamentalabbildung auf ein Grenzkreispolygon mit vier paarweise durch lineare Substitutionen einander zugeordneten inneren Seiten übertragen. Nach passender Normierung dieses Polygons erscheint dasselbe als aus zwei spiegelbildlich symmetrischen Hälften zusammengesetzt; und es ergibt sich von hier aus sofort die Abbildung des ursprünglich gegebenen Bereiches auf einen von drei der Achse des Reellen angehörenden Schlitzten begrenzten Bereich. Damit ist zunächst die *verborgene Symmetrie* des ursprünglich gegebenen allgemeinen, dreifach zusammenhängenden Bereiches evident geworden.

Die Aufgabe der konformen Abbildung des allgemeinen dreifach zusammenhängenden Bereiches ist damit der allgemeineren Aufgabe der konformen *Abbildung eines beliebigen symmetrischen mehrfach zusammenhängenden Bereiches auf einen Kreisbereich* untergeordnet. Den abzubildenden symmetrischen Bereich normieren wir zweckmäßig sogleich als einen von lauter der Achse des Reellen angehörenden Schlitzten begrenzten Bereich. Im zweiten Abschnitt wird nun die Abbildung des allgemeinen symmetrischen Schlitzbereiches auf einen Kreisbereich mit dem Problem der *Fundamentalabbildung des komplementären Schlitzbereiches* in Zusammenhang gebracht. Als solchen bezeichnen wir denjenigen Schlitzbereich, der aus dem gegebenen dadurch entsteht, daß die

²⁾ Bezüglich des iterierenden Verfahrens verweise ich auf folgende früheren Veröffentlichungen: Jahresbericht der D. M. V. 1907, 1910, 1912; Gött. Nachr. 1908, 1909, 1910; Math. Ann. 72 (1912). Wegen Anwendung der Methode der Überlagerungsfläche auf das in Rede stehende Abbildungsproblem verweise ich noch auf meine Veröffentlichungen im Journ. f. Math. 138: „Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, erster Teil“, § 15, sowie im Jahresbericht der D. M. V. 1910, — Allgemein ist zu verweisen auf den Encyklopädieartikel von L. Lichtenstein, Bd. II C 3: „Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung.“

³⁾ Diesbezüglich sei auch auf die Behandlung im Jahresbericht der D. M. V. (1907) hingewiesen.

von seinen Begrenzungsschlitten freigelassenen Strecken der Achse des Reellen statt der gegebenen Schlitzte als neue Begrenzungsschlitzte gewählt werden. Hierdurch ist der Anschluß an die Resultate der Abhandlung II gewonnen, wo gezeigt wurde, wie durch das *Schmieguungsverfahren* jeder beliebige schlichte mehrfach zusammenhängende Bereich der Fundamentalabbildung unterworfen werden kann.

Wenn somit die gestellte Aufgabe für den symmetrischen Schlitzbereich unter Bezugnahme auf die Abhandlung II als gelöst hingestellt werden kann, so hat doch die Methode der Fundamentalabbildung gemäß unserem allgemeinen Schmieguungsverfahren einen wichtigen Nachteil, insofern als sie der Symmetrie des Problems nicht Rechnung trägt. Dieser Nachteil wird bei der zweiten, hier neu mitgeteilten Methode vermieden, die recht eigentlich ein Ideal der Behandlung des gestellten Abbildungsproblems für die symmetrischen Schlitzbereiche darstellt. Das neue, als *Iterationsverfahren* bezeichnete Verfahren bringt die gewünschte Abbildung auf einen symmetrischen Kreisbereich durch eine *unbegrenzte Folge reeller Wurzeltransformationen* zustande, deren einzelne die von einem einfachen endlichen reellen Schlitzte begrenzte Ebene auf das Äußere eines Kreises in der Weise abbildet, daß die Abbildungsfunktion $\varphi(z)$ im Unendlichen stets der Normierungsbedingung $\varphi(z) = z + ((0))$ genügt⁴⁾.

Die nähere Darlegung dieses Iterationsverfahrens, dessen topologische Seite (*topologisches Iterationsverfahren*) ebenfalls klar herausgearbeitet wird, findet sich im vierten Teile, wo dann die gestellte Aufgabe sogleich in einer Erweiterung erledigt wird. Die erwähnte Abbildungsaufgabe für symmetrische Bereiche ist nämlich wesentlich identisch mit dem Problem, eine *reelle hyperelliptische Kurve*

$$w^2 = (z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_{2p+2})$$

mit $p + 1$ reellen Zügen ohne Relativverzweigung so zu *uniformisieren*, daß die uniformisierende Variable auf den reellen Zügen der Kurve nur reelle Werte annimmt. Diese Problemstellung wird nun im dritten Teile der Abhandlung aufgeworfen, und zwar in *Erweiterung auf irgendwelche reelle hyperelliptische Kurven*, die man erhält, wenn man die Stellen a der obigen Gleichung teils reell, teils paarweise konjugiert komplex annimmt, wobei die bekannte Einteilung solcher Kurven in *orthosymmetrische* und *diasymmetrische* Platz greift.

Während nun der dritte Teil der Abhandlung lediglich der *Analyse*

⁴⁾ Die von uns in Abh. I und II entwickelten „Schmieguungsverfahren“ können sinngemäß auch als Iterationsmethoden bezeichnet werden. Wegen des Vorkommens von Iterationsmethoden bei Poincaré und Schlesinger verweise ich auf die Bemerkungen in Abh. II (Acta math. 40, S. 255).

des gestellten Uniformisierungsproblems gewidmet ist, als deren Ziel die Herausarbeitung des Zusammenhanges des Problems mit dem Problem der Fundamentalabbildung und die Charakterisierung der gesuchten Transzendenten $\zeta(z, w)$ als einer Größe $\zeta(z)$ angesehen wird, wird im vierten Teile das *Iterationsverfahren* zur Bestimmung der Transzendenten $\zeta(z) \equiv \zeta(z, w)$ gelehrt, welches, oben bereits angedeutet, hier in der bezeichneten Erweiterung der Problemstellung zur Entfaltung gelangt. Die zur Anwendung gelangenden *Wurzeltransformationen* sind sämtlich für die reellen Züge der Kurve *reell*, und der ganze Konvergenzbeweis, bei dem trotz mancher Eigenart doch alte Grundgedanken von mir maßgebend sind, wird in einer Form geführt, die gleichförmig die reellen und imaginären Punkte der Kurve erfaßt. Es kommt darauf an, die teils längs reeller Schlitzte, teils längs solcher, die in bezug auf die Achse des Reellen zu sich selbst symmetrisch sind, aufgeschnittene schlichte Ebene auf einen ebensolchen Bereich abzubilden, bei welchem jene Schlitzte in geschlossene Linien verwandelt erscheinen, die durch elliptische lineare Substitutionen der Periode 2 auf sich selbst bezogen sind. Die Anwendung des Iterationsverfahrens bewirkt eine *sukzessive Erhöhung der Reproduktionsfähigkeit des Bereiches* gemäß den Randsubstitutionen. Diese Reproduktionsfähigkeit wird in der Grenze eine allseitig unendliche, was die Linearität jener Substitutionen zur Folge hat.

Denkt man sich die schlichte Ebene längs $p + 1$ *beliebig gelegener*, unter Festhaltung ihrer Endpunkte deformabel vorstellbarer *Einschnitte* aufgeschnitten, so gelangt man zu einem *allgemeineren Abbildungsproblem*, das ebenfalls mit Hilfe des *Iterationsverfahrens* durch eine Folge von Wurzeltransformationen erledigt werden kann. Bei diesem Abbildungsproblem wird die in der erwähnten Weise aufgeschnittene schlichte Ebene in einen $(p + 1)$ -fach zusammenhängenden Bereich mit $p + 1$ elliptischen Randsubstitutionen der Periode 2 verwandelt; und zwar gehen die Endpunkte der genannten Einschnitte in die Fixpunkte der Substitutionen über; die einzelne Substitution ordnet dabei die beiden Hälften der jedem einzelnen Schlitzte entsprechenden geschlossenen Begrenzungslinie des Bildbereiches einander zu. Mit dieser Abbildung hat man zugleich eine *Uniformisierung beliebiger hyperelliptischer Kurven* durch automorphe Funktionen des Schottkyschen Typus im Sinne des von Klein in Math. Ann. 19 (1882) aufgestellten Fundamentaltheorems⁵⁾ ⁶⁾.

⁵⁾ Bekanntlich ist jede algebraische Kurve vom Geschlecht $p = 2$ hyperelliptisch. Im Falle $p = 2$ läßt sich dartun, daß das geschilderte Iterationsverfahren alle überhaupt möglichen zur Kurve gehörenden Uniformisierenden des Schottkyschen Typus liefert. Andererseits liefert unser Schmiegunungsverfahren der Abh. II (§§ 5–7) bei Anwendung auf die in den Punkten $a_1, a_2, \dots, a_{2p+2}$, d. i. in den Windungspunkten

Schließlich wird noch die naheliegende *Erweiterung* des letzterwähnten Abbildungsproblems vorgenommen, die darin besteht, daß an Stelle der erlangten elliptischen Substitutionen der Periode 2 solche von einer beliebig vorgegebenen höheren Periode verlangt werden (*Sicheltheorem*).

Hier wie bei allen vorerwähnten Abbildungs- und Uniformisierungsproblemen ist bemerkenswert, daß unsere Konvergenzmethoden eine Voraussetzung der Anzahl der Operationen gestatten, die erforderlich ist, um dem gewünschten Ziele mit vorgegebener Genauigkeit nahe zu kommen. Es ist damit eine prinzipielle Seite dieser Konvergenzmethoden hervorzuheben, die mir eine besondere Beachtung zu verdienen scheint. Auch die effektive Ausführbarkeit der bei unseren Iterationsmethoden zur Verwendung gelangenden Wurzeltransformationen verleiht diesen Methoden im Gegensatz zu anderen eine Sonderstellung und ein erhöhtes Interesse. Schließlich ist noch hervorzuheben, daß bei den hier behandelten Abbildungsproblemen auch die eindeutigen Umkehrungsfunktionen, insbesondere die der Uniformisierung reeller hyperelliptischer Kurven, unmittelbar mittels Schottkyscher Reihenbildungen dargestellt werden können.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Teil (§§ 1—3). Abbildung des dreifach zusammenhängenden Bereichs.	240—250
Zweiter Teil (§§ 4—6). Abbildung symmetrischer Bereiche auf Kreisbereiche.	250—255
Dritter Teil (§§ 7—11). Uniformisierung reeller hyperelliptischer Kurven (erster Abschnitt): Problemstellung und Analyse desselben; Zusammenhang mit dem Problem der Fundamentalabbildung schlichter mehrfach zusammenhängender Bereiche.	256—269
Vierter Teil (§§ 12—15). Uniformisierung reeller hyperelliptischer Kurven (zweiter Abschnitt): Das Iterationsverfahren.	269—282
Fünfter Teil (§§ 16—21). Abbildung beliebiger mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Kreisbereiche.	282—296
Sechster Teil (§§ 22—24). Uniformisierung beliebiger hyperelliptischer Kurven nach Schottkyschem Typus; Sicheltheorem.	296—301

der hyperelliptischen Riemannschen Fläche, signierte schlichte Ebene die Fundamentaluniformisierende (Grenzkreisuniformisierende) der hyperelliptischen Kurven.

^{o)} Wegen der allgemeinen von Klein und Poincaré 1882/83 aufgestellten Uniformisierungstheoreme für algebraische Kurven („Fundamentaltheoreme“) verweise ich auf meine Abhandlungen in Math. Ann. 67, 69, 72, 75.

Erster Teil.

Abbildung des dreifach zusammenhängenden Bereichs

§ 1. In der z -Ebene sei ein beliebiger, dreifach zusammenhängender schlichter Bereich B gegeben. Der Bereich B werde dabei als nur von seinen inneren Punkten gebildet angesehen. Über die Natur seiner Begrenzungen werden keine Voraussetzungen gemacht. Diese wird vielmehr als die Menge aller derjenigen Punkte der z -Ebene erklärt, in deren beliebiger Nähe noch innere Punkte des Bereichs B liegen. Wir stellen uns die Aufgabe, den Bereich B eindeutig und konform auf einen dreifach zusammenhängenden Kreisbereich abzubilden, d. i. einen von drei Vollkreisen begrenzten Bereich, der selbst bei der Abbildung als unbekannt anzusehen ist. Das Resultat unserer Entwicklungen wird sein, daß es eine und abgesehen von einer willkürlichen linearen Transformation, nur eine Funktion $f(z)$ gibt, durch die eine Abbildung im geforderten Sinne vermittelt wird.

Den Fall, daß eine oder mehrere Begrenzungskontinuen des Bereichs isolierte Punkte sind, können wir sogleich von der Betrachtung ausschließen. Ein solcher isolierter Punkt würde nämlich bei jeder Abbildung, die den Bereich B wieder auf einen schlichten Bereich eindeutig abbildet, seinerseits in einen isolierten Punkt übergehen müssen, wobei die Abbildungsfunktion selbst auch in diesem isolierten Punkt regulär wäre (vgl. Satz III S. 204 der Abhandlung I). Das Abbildungsproblem würde sich mithin auf ein solches für zweifach oder einfach zusammenhängende Bereiche reduzieren; diese Aufgabe aber haben wir bereits in Abh. I der Serie (Journ. f. Math. 145) erledigt.

Es ist nützlich, von vornherein noch zu bemerken, daß die Begrenzungskontinuen L_1, L_2, L_3 des Bereichs B alle drei als geschlossene reguläre analytische Linien angenommen werden können. Wir erreichen dies nämlich sofort dadurch, daß wir nacheinander drei Fundamentalabbildungen einfach zusammenhängender Bereiche ausführen. Die erste dieser Fundamentalabbildungen erstreckt sich auf denjenigen von L_1 allein begrenzten unendlichen, einfach zusammenhängenden Bereich, der B a Teil enthält. Bei dieser Abbildung geht B in einen Bereich B_1 über, dessen erste Begrenzungslinie ein Kreis ist. Nunmehr wird die zweite Begrenzungslinie von B_1 in analoger Weise behandelt, wobei B_1 in B_2 übergehen möge, schließlich die dritte Begrenzungslinie von B_2 derselben Prozedur unterworfen, wodurch B_2 in B_3 übergeht. Letzterer Bereich ist dann ein von drei geschlossenen regulären analytischen Linien begrenzter Bereich.

Wir unterwerfen den Bereich B , den wir nunmehr von vornherein von drei geschlossenen regulären analytischen Linien L_1, L_2, L_3 begrenzt annehmen, zum Zwecke der Lösung der gestellten Abbildungsaufgabe zunächst der Fundamentalabbildung (s. Abh. II), d. h.: Wir bestimmen, und zwar mit Hilfe unseres Schmieguungsverfahrens, eine Funktion $\varphi(z) = \zeta$, die in B allenthalben regulär und endlich ist und jeden Wert $|\zeta| < 1$ einmal und nur einmal annimmt. Diese Abbildung ist eine ein-unendlich-deutige. Sie wird ihrer topologischen Struktur nach am deutlichsten mit Hilfe der einfach zusammenhängenden Überlagerungsfläche $B^{(\infty)}$ des Bereichs B vorgestellt, da es sich in der Tat bei der in Rede stehenden Abbildung um eine eineindeutige konforme Abbildung dieser Fläche $B^{(\infty)}$ auf die schlichte Fläche des ζ -Einheitskreises handelt.

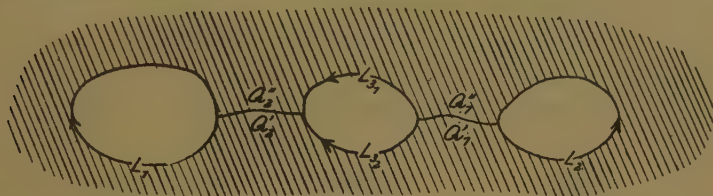


Fig. 1.

Um die Fläche $B^{(\infty)}$ unseren Zwecken entsprechend zu konstruieren, verwandeln wir den Bereich B in einen einfach zusammenhängenden Bereich, indem wir zwei Querschnitte Q_1 und Q_2 ziehen, deren erster L_2 mit L_3 und deren zweiter L_1 mit L_3 verbindet, wie Fig. 1 zeigt. Der Rand des so gewonnenen einfach zusammenhängenden Bereichs $B_0 \equiv B^{(0)}$ zerfällt in acht Stücke, die, in der Reihenfolge abwechselnd, teils von den Randlinien des Bereichs B , teils von den Querschnitten herrühren; in der Figur: $L_1, Q_2', L_{3,1}, Q_1', L_2, Q_1', L_{3,2}, Q_2'$. Diese acht Seiten des Randpolygons von B_0 werden wir dementsprechend zweckmäßig als *Randseiten* bzw. *Querschnittseiten* bezeichnen.

Die Überlagerungsfläche $B^{(\infty)}$ entsteht nun, indem man von $B^{(0)}$ zu $B^{(1)}, B^{(2)}, B^{(3)}, \dots$ nach folgender Regel übergeht. $B^{(1)}$ entsteht aus $B^{(0)}$, indem an jede der vier Querschnittseiten von $B^{(0)}$ ein Neuexemplar B_0 angeheftet wird. Der Bereich $B^{(1)}$ ist somit ein $(1+4)$ -blättriger Bereich; er hat $4 \cdot 3$ Querschnittseiten und ebensoviel Randseiten. Indem man an jede Querschnittseite von $B^{(1)}$ wieder ein Neuexemplar B_0 heftet, entsteht der Bereich $B^{(2)}$ als ein $(1+4+4 \cdot 3)$ -blättriger Bereich mit $4 \cdot 3^2$ Querschnittseiten und ebensoviel Randseiten. Der nächste Bereich, $B^{(3)}$, hat $1+4+4 \cdot 3+4 \cdot 3^2$ Blätter, $4 \cdot 3^3$ Querschnittseiten und ebensoviel Randseiten. Allgemein ergibt sich $B^{(n)}$ als ein einfach zusammenhängender Bereich, gebildet aus $2 \cdot 3^n - 1$ Blättern B_0 mit einer Be-

begrenzungsline, die ihrerseits in $2 \cdot 4 \cdot 3^n$ Stücke zerlegt erscheint, nämlich $4 \cdot 3^n$ Querschnittseiten und ebensoviel Randseiten, die bei vollständiger Durchlaufung der Begrenzung von $B^{(n)}$ abwechselnd aufeinanderfolgen.

Dem geschilderten Überlagerungsprozesse in der z -Ebene entspricht in der ζ -Ebene ein Nebenlagerungsprozeß. Die analytische Funktion $\varphi(z)$, die die betrachtete Fundamentalabbildung des Bereichs B leistet, verhält sich auf den Begrenzungslinien dieses Bereichs regulär (vgl. Abh. II, § 4). Der einzelnen Begrenzungsline L entsprechen auf $B^{(\infty)}$ unendlich viele voneinander getrennte *Liniengewinde* $L^{(\infty)}$, deren jedes durch unendlich häufige Durchlaufung der zugrunde liegenden Linie L im positiven wie im negativen Sinne entsteht. Diesen Linien $L^{(\infty)}$ entsprechen bei der Fundamentalabbildung in regulärer Weise lauter voneinander verschiedene Stücke der Peripherie des ζ -Einheitskreises.

Bei der Abbildung des Bereichs $B^{(\infty)}$ durch die Funktion $\varphi(z)$ entspricht zunächst dem Grundblatte $B^{(0)}$ ein einfach zusammenhängender Bereich $\beta^{(0)}$, dessen Begrenzung gemäß ihrer Entstehung durch die Ab-

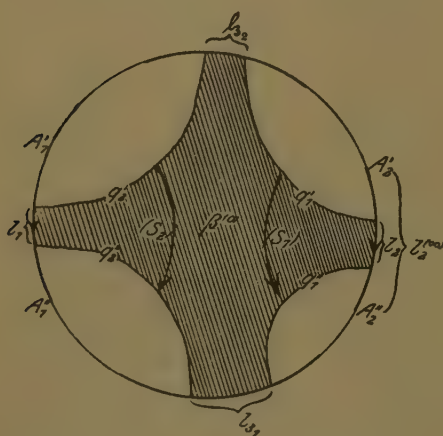


Fig. 2.

bildung vier Randseiten und vier Querschnittseiten aufweist, deren letztere paarweise durch lineare Substitutionen, S_1 und S_2 , aufeinander bezogen sind, wie Fig. 2 zeigt. Die aus S_1 und S_2 als erzeugende Substitutionen gebildete Substitutionsgruppe Γ ist die zum Bereiche B gehörende Fundamentalgruppe. Die Substitutionen dieser Gruppe vermitteln den Zusammenhang zwischen den unendlich vielen Zweigen der Funktion $\varphi(z)$ und dem in $B^{(0)}$ erklärten Grundzweige. Dadurch wird verständlich, daß bei Anwendung aller dieser Substitutionen auf der

Bereich $\beta^{(0)}$ eine Ausfüllung des ζ -Einheitskreises mit den so gewonnenen Bildern des Bereichs $\beta^{(0)}$ bewirkt wird.

Wenden wir speziell die Substitutionen S_1 und S_1^{-1} und deren Wiederholungen an, so entspricht dem ein Nebenlagerungsprozeß von Bildern des Bereichs $\beta^{(0)}$, bei welchem die Linie L_3 über ihre beiden Enden hinaus bis zu zwei Grenzpunkten hin im Sinne einer asymptotischen Annäherung erweitert wird. Diese beiden Grenzpunkte sind die Fixpunkte der Substitution S_1 , die sich als eine hyperbolische Substitution darstellt. Der Nebenlagerungsprozeß zeigt, daß von den auf der Peripherie des

-Einheitskreises liegenden Fixpunkten der eine zwischen l_2 und l_{3_1} , der andere zwischen l_2 und l_{3_2} liegt. Aus analogen Gründen liegen die Fixpunkte der hyperbolischen Substitution S_2 zwischen l_1 und l_{3_1} bzw. l_{3_2} . Die bis zu den Fixpunkten von S_1 bzw. S_2 verlängerten Peripherieteile l_2 und l_1 mögen mit $l_2^{(\infty)}$ bzw. $l_1^{(\infty)}$ bezeichnet werden. Sie sind vollständige Bilder von Liniengewinden $L_2^{(\infty)}$ bzw. $L_1^{(\infty)}$, nämlich speziell derjenigen, die an der Begrenzung von $B^{(0)}$ teilnehmen.

Die Begrenzungsteile L_{3_1} und L_{3_2} sind Teile von Liniengewinden $L_{3_1}^{(\infty)}$ und $L_{3_2}^{(\infty)}$, deren tatsächliche Verschiedenheit voneinander als Begrenzungen von $B^{(\infty)}$ aus der Natur des geschilderten Überlagerungsprozesses für $B^{(\infty)}$ sofort einleuchtet. In der ζ -Ebene entsprechen diesen Liniengewinden Peripherieteile $l_{3_1}^{(\infty)}$ und $l_{3_2}^{(\infty)}$, deren Endpunkte als Fixpunkte gewisser hyperbolischer Substitutionen aufgefaßt werden können, nämlich offenbar derjenigen Substitutionen, die sich bei Durchlaufung der Linie L_3 im Pfeilsinne von L_{3_1} bzw. L_{3_2} ergeben. Auszugehen hat man dabei vom Grundzweige der Funktion $\varphi(z)$, der $B^{(0)}$ auf $\beta^{(0)}$ abbildet. Dabei macht es dann einen Unterschied aus, ob man als Ausgangspunkt der Umlaufung in Fig. 2 einen Punkt auf L_{3_1} oder L_{3_2} wählt.

Im ersten Falle erhält man bei Innehaltung der in Fig. 2 angegebenen Pfeilrichtung die Umlaufsubstitution $S_1^{-1}S_2$, im zweiten Falle $S_1S_2^{-1}$. Wir machen noch die Bemerkung, daß die vier Linien $l^{(\infty)}$, die wir vorhin durch Fortsetzung der vier Randseiten von $\beta^{(0)}$ gewonnen haben, voneinander völlig getrennt liegen, auch keinen Endpunkt gemeinschaftlich haben. Es folgt dies schon daraus, daß es sich um Bilder von vier durchaus verschiedenen Liniengewinden $L^{(\infty)}$ handelt und daß sich bei dem übersichtlichen Nebenlagerungsprozeß in der ζ -Ebene zwischen je zwei auf der Peripherie benachbarte unserer vier Linien $l^{(\infty)}$ weitere Linien $l^{(\infty)}$ lagern.

Offenbar wird jede Linie $l^{(\infty)}$ durch Anwendung einer Substitution der Fundamentalgruppe Γ entweder in sich selbst transformiert oder in eine andere Linie $l^{(\infty)}$. Indem wir von dieser Bemerkung Gebrauch machen, erkennen wir sofort, daß bei Anwendung der Substitution S_1 die Linie $l_2^{(\infty)}$ in sich, hingegen die Linie $l_{3_2}^{(\infty)}$ in die Linie $l_{3_1}^{(\infty)}$ übergeht, bei Anwendung der Substitution S_2 hingegen die Linie $l_{3_1}^{(\infty)}$ in sich, die Linie $l_{3_2}^{(\infty)}$ wieder in die Linie $l_{3_1}^{(\infty)}$ übergeht. Die Endpunkte der Linien q auf den genannten Linien $l^{(\infty)}$ entsprechen sich nämlich vermöge der Substitutionen S_1 und S_2 in ersichtlicher Weise. Dieses Entsprechen ist auch für das Entsprechen der jene Endpunkte enthaltenden Linien $l^{(\infty)}$ maßgebend. Fig. 3 zeigt die in Rede stehenden vier Linien $l^{(\infty)}$ mit ihren Endpunkten A . Die Substitution S_1 führt A'_{3_2} in A'_{3_1} , A''_{3_2} in A'_{3_1} über; ebenso die Substitution S_2 .

$SC \cdot SD = (SB)^2$ ist, ergibt sich, daß die Länge der Tangente ST von S aus an den Orthogonalbogen CD gleich SB ist. Demgemäß schneidet der Orthogonalbogen AB den Orthogonalbogen CD im Punkte T unter rechtem Winkel. Die beiden Punktpaare AB und CD erscheinen somit auf dem Grundkreise durch zwei zueinander senkrechte Orthogonalbögen ausgeschnitten. Dann aber haben sie das gewünschte Doppelverhältnis -1 , wie man sofort erkennt, wenn man z. B. den zweiten Schnittpunkt T' der beiden Orthogonalbögen durch Inversion ins Unendliche bringt und dadurch die beiden Orthogonalbögen in zwei zueinander senkrechte Durchmesser eines Kreises verwandelt, so daß nunmehr die Bildpunkte der Punkte $ABCD$ als die Eckpunkte eines Quadrats erscheinen.

Der Bereich $\tilde{\beta}^{(0)}$ läßt sich in zwei zueinander spiegelbildlich symmetrische Hälften zerlegen. Dazu konstruieren wir die Verbindung q_3 der beiden Peripherieteile $l_1^{(\infty)}$ und $l_2^{(\infty)}$ durch einen Orthogonalkreisbogen, dessen Endpunkte zu den beiden Punktpaaren (A'_1, A''_1) und (A'_3, A''_3) harmonisch liegen. Diese Verbindung ist in Fig. 3 ausgeführt. Spiegeln wir das Innere des Fundamentalkreises an dem Bogen $\tilde{q}_3$, so werden dabei die beiden Punkte A'_1, A''_1 , desgleichen die beiden Punkte A'_3, A''_3 miteinander vertauscht. Der Kreisbogen $\tilde{q}_3$ stellt, zu einem vollen Kreise vervollständigt, eine Niveaulinie für jede der hyperbolischen Substitutionen S_1 und S_2 dar. Vermöge der Spiegelung werden diese Substitutionen in die inversen Substitutionen verwandelt, was für die oben betrachteten Substitutionen $S_1^{-1}S_2$ und $S_1S_2^{-1}$ bedeutet, daß diese ineinander übergehen. Es werden folglich bei der erwähnten Spiegelung auch die Fixpunktpaare der letzteren Substitutionen miteinander vertauscht, d. h.: A'_{3_2} geht in A'_{3_1} , A''_{3_2} in A''_{3_1} über, mithin $l_{3_2}^{(\infty)}$ in $l_{3_1}^{(\infty)}$. Nunmehr ergibt sich aus der invarianten Definition der normierten Querschnittseiten sofort deren gegenseitiges Entsprechen bei der Spiegelung an $\tilde{q}_3$. Es entsprechen sich einerseits $\tilde{q}'_1$ und $\tilde{q}''_1$, andererseits $\tilde{q}'_2$ und $\tilde{q}''_2$. Die bei diesem Entsprechen stattfindende Punktzuordnung auf diesen Linien ist dieselbe wie die durch die Substitutionen S_1 bzw. S_2 vermittelte, weil eine hyperbolische Substitution durch ihre auf der Peripherie liegenden Fixpunkte in Verbindung mit einem weiteren Paar zugeordneter Peripheriepunkte bereits bestimmt ist.

Die beiden zueinander spiegelbildlich symmetrischen Hälften des Bereichs $\tilde{\beta}^{(0)}$ mögen mit $\tilde{\beta}^{(0)_1}$ und $\tilde{\beta}^{(0)_2}$ bezeichnet werden. Indem wir den Bereich $\tilde{\beta}^{(0)_1}$ dem Spiegelungsprozeß unterwerfen, gelangen wir zu einer vollständigen Bedeckung des Inneren des Einheitskreises. Die Gesamtheit der unendlich vielen Transformationen, durch welche die verschiedenen Bilder von $\tilde{\beta}^{(0)_1}$ aus diesem entstehen, bilden eine teils von Transformationen ohne Umlegung, teils von Transformationen mit Umlegung der

Winkel gebildete Gruppe $\tilde{\Gamma}$, die die Gruppe Γ als Teil enthält. Wie $\tilde{L}$ aus S_1 und S_2 als Erzeugenden entsteht, so entsteht $\tilde{\Gamma}$ aus den drei Spiegelungen an den begrenzenden Orthogonalkreisbögen des Bereichs $\tilde{\beta}^{(0)}$ als erzeugende Transformationen. Die durch den Spiegelungsprozeß gewonnene Parzellierung setzt zugleich diejenige Parzellierung in Evidenz, die durch Anwendung der Gruppe Γ auf $\tilde{\beta}^{(0)}$ entsteht. Man hat dabei immer je zwei benachbarte Bereiche der Parzellierung für $\tilde{\Gamma}$ zu einem Bereiche zusammenzufassen.

Daß es tatsächlich durch den Spiegelungsprozeß zu einer vollständigen singularitätenfreien Bedeckung des Inneren des Einheitskreises kommt, können wir uns auf verschiedene Weise direkt klarmachen. Im vorliegenden Falle genügt es jedoch darauf hinzuweisen, daß die Punkte des Bereichs $\tilde{\beta}^{(0)}$ in bezug auf Γ , abgesehen von der Zuordnung der Randpunkte durch S_1 und S_2 , tatsächlich inäquivalent sind. Bei Rückkehr zum Bereiche B ergibt sich daher sofort als Bild von $\tilde{\beta}^{(0)}$ ein Bereich $\tilde{B}^{(0)}$, der sich von $B^{(0)}$ nur durch eine andere Wahl der Querschnitte unterscheidet.

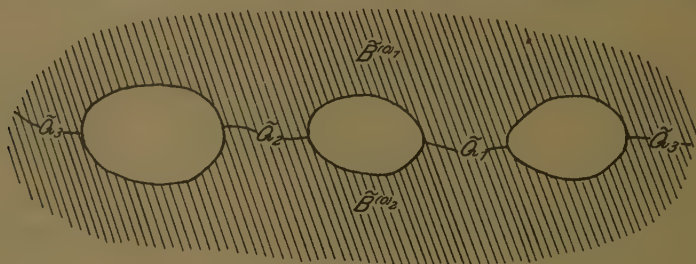


Fig. 5.

Die Einführung der Linie $\tilde{Q}_3$ bedeutet für $\tilde{B}^{(0)}$ eine Vervollständigung der Aufschneidung durch Anbringung eines weiteren Querschnittes $\tilde{Q}_3$ in $\tilde{B}^{(0)}$, wodurch der Bereich B nunmehr in zwei zueinander symmetrische einfach zusammenhängende Hälften $\tilde{B}^{(0)_1}$ und $\tilde{B}^{(0)_2}$ zerlegt wird, wie Fig. 5 zeigt. Die Linien $\tilde{Q}_1$, $\tilde{Q}_2$, $\tilde{Q}_3$ sind reguläre analytische Linien, welche die ebenfalls regulären analytischen Begrenzungslinien L_1 , L_2 , L_3 von B unter rechten Winkeln schneiden.

Die Hälften $\tilde{B}^{(0)_1}$ und $\tilde{B}^{(0)_2}$ entsprechen einander gemäß der entwickelten Auffassung vermöge analytischer Spiegelung an der Linie $\tilde{Q}_3$. Diese Spiegelung ist nun aber, wie wir sahen, eine solche, bei der in der ζ -Ebene vermöge S_1 oder S_2 äquivalente Punkte einander entsprechen. Das bedeutet für uns, daß die erwähnte Spiegelung an $\tilde{Q}_3$ auch die Uferpunkte von $\tilde{Q}_1$ einander identisch entsprechen läßt, desgleichen die Uferpunkte von $\tilde{Q}_2$. Man erkennt so, daß die Spiegelung an $\tilde{Q}_3$ dieselbe analytische Beziehung der beiden Hälften $\tilde{B}^{(0)_1}$ und $\tilde{B}^{(0)_2}$ vermittelt, wie

die Spiegelung an $\tilde{Q}_1$ und $\tilde{Q}_3$. Denn die Spiegelung an einer analytischen Linie kann definiert werden als diejenige eindeutig bestimmte indirekte konforme Abbildung der Umgebung dieser Linie, bei der die Punkte dieser Linie selbst einander identisch zugeordnet sind.

§ 3. Es fragt sich, ob die hiermit gefundene Symmetrie des Bereichs B einzig in ihrer Art ist. Das ist in der Tat der Fall. Der Satz, den wir diesbezüglich jetzt beweisen werden, lautet präzise folgendermaßen: Der Bereich B kann nur auf eine Weise durch drei reguläre analytische Querschnitte Q_1, Q_2, Q_3 , von denen immer Q_α die Begrenzungslinien L_β und L_γ verbindet $[(\alpha, \beta, \gamma)$ eine beliebige Permutation von $(1, 2, 3)]$, in zwei zueinander in bezug auf jene drei Querschnitte spiegelbildlich symmetrische einfach zusammenhängende Hälften zerlegt werden, so daß also bei der gemeinten symmetrischen Beziehung die Punkte aller drei genannten Querschnitte fest bleiben.

Zum Beweise vorstehender Behauptung führen wir zunächst eine neue Abbildung des Bereichs B durch, nämlich auf *die längs dreier voneinander verschiedener getrennter reeller Schlitzte aufgeschnittene Vollebene*, welchen Bereich wir mit B' bezeichnen wollen. Die Abbildung von B auf einen Bereich B' vollziehen wir einfach durch Abbildung des Bereichs $\tilde{B}^{(0)}$ oder $\tilde{\beta}^{(0)}$ auf die obere Halbebene einer z' -Ebene. Diese Abbildung können wir mit Hilfe unseres Schmiegevorgangs (Abh. I) ausführen, wodurch wir zunächst zu einer Kreisfläche als Bild geführt werden, die dann ihrerseits durch eine lineare Transformation auf die obere z' -Halbebene abgebildet werden kann. Die begrenzenden Kreisbögen des Bereichs $\tilde{\beta}^{(0)}$ werden dabei in regulärer Weise in Stücke der Achse des Reellen übertragen, gemäß den in Abh. I entwickelten Sätzen über die Ränderzuordnung. Dem Bereiche $\tilde{\beta}^{(0)}$ entspricht bei der gefundenen Abbildung

$$\psi(\zeta) = z'$$

die untere z' -Halbebene. Dem ganzen Bereiche $\tilde{\beta}^{(0)}$ entspricht daher bei Beachtung der für diesen Bereich bestehenden Ränderzuordnung die längs dreier reeller Schlitzte aufgeschnittene z' -Ebene, insofern zugeordneten Randpunkten von $\tilde{\beta}^{(0)}$ identische Punkte der Achse des Reellen in der z' -Ebene entsprechen. (S. auch Fußnote 9 in § 15.)

Das Ergebnis der vorstehenden Überlegung ist die Überführung des Bereichs B mittels eineindeutiger konformer Abbildung durch eine Funktion

$$\psi(\varphi(z)) = f(z) = z'$$

in einen Bereich B' , der von drei getrennten geradlinigen Schlitzten auf der Achse des Reellen begrenzt ist und als solcher sofort die beim Originalbereich B verborgene analytische Symmetrie dieses Bereichs zur

unmittelbaren Anschauung bringt. Die Abbildungsfunktion verhält sich der Herleitung gemäß auf der Begrenzung des Bereichs B überall regulär, sofern wir die Begrenzungsschlitzte von B' sämtlich im Endlichen liegend wählen, was durch lineare Transformation immer erreicht wird. Die oben aufgeworfene Frage der eindeutigen Bestimmtheit der Symmetrie des Bereichs B steht in Zusammenhang mit der anderen nach der eindeutigen Bestimmtheit der Abbildung des Bereichs B auf den Bereich B' .

Erledigen wir zunächst die letztere Frage.

Es werde angenommen, daß es eine zweite Abbildung des Bereichs B auf einen schlichten Bereich B'' gäbe, der ebenso wie B' von drei getrennten reellen Schlitzten begrenzt sei. Sind z' und z'' die vermöge der beiden Abbildungen dem Punkte z entsprechenden Punkte, so stellt sich die Beziehung $z''(z')$ als eine eineindeutige Abbildung von B' auf B'' dar. Von dieser Abbildung zeigen wir nunmehr, daß sie nichts anderes als eine reelle lineare Transformation sein kann. Nach den Lehren der Ränderzuordnung schließen wir zunächst, daß, auch wenn die Abbildungsbeziehung zwischen B' und B'' zunächst nur für die inneren Punkte dieser beiden Bereiche als erklärt angesehen wird, die Begrenzungen in regulärer Weise einander entsprechen, wobei man sich die in den Schlitzendpunkten liegenden Umkehrpunkte der Begrenzung durch lokale Quadratwurzelabbildungen in gewöhnliche Begrenzungspunkte verwandelt zu denken hat. Die Abbildung der Bereiche B' und B'' aufeinander läßt sich nunmehr durch Spiegelung an den Begrenzungsschlitzten zu einer eineindeutigen Abbildung zweier geschlossener zweiblättriger Riemannscher Flächen F' und F'' erweitern, die aus B' und B'' durch Überkreuzanheftung je eines identischen koinzidierenden Blattes längs der Begrenzungsschlitzte entstehen. Die Flächen F' und F'' haben jede sechs Windungspunkte erster Ordnung, die in den Endpunkten der Schlitzte liegen.

Die Größe z'' stellt sich, als Funktion von z' betrachtet, jetzt als eine zweideutige Funktion dar, die auf F' eindeutig erklärt ist. Die beiden Zweige dieser Funktion mögen durch Bezeichnungen z_1'' und z_2'' voneinander unterschieden werden. Bilden wir dann die Gleichung

$$(z'' - z_1'')(z'' - z_2'') = 0,$$

so ergibt sich daraus für z'' eine quadratische Gleichung, deren Koeffizienten $-(z_1'' + z_2'')$ und $z_1''z_2''$ rationale Funktionen mit offenbar nicht mehr als zwei und zwar bei beiden Funktionen denselben Unendlichkeitsstellen werden. Wir machen dabei die auf einen Widerspruch zu führende Annahme, daß $z''(z')$ keine lineare Funktion sei. Die genannten Koeffizienten sind mithin als Quotienten ganzer rationaler Funktionen zweiten Grades

on z' und zwar mit demselben Nenner darstellbar. Die Gleichung in z'' bekommt also die Gestalt

$$g_0(z')z''^2 + g_1(z')z'' + g_2(z') = 0,$$

wobei $g_0(z')$, $g_1(z')$, $g_2(z')$ ganze rationale Funktionen zweiten Grades von z' sind. Hieraus ergibt sich für z'' durch Auflösung ein Ausdruck, auf Grund dessen diese Funktion als eine zweideutige Funktion mit nicht mehr als vier Verzweigungsstellen erscheint. Von den sechs Bindungspunkten der Fläche F' würden daher mindestens zwei keine Verzweigungspunkte der Funktion sein, was bedeuten würde, daß zunächst für die Umgebung dieser Fixpunkte, dann aber überhaupt für die ganze Fläche F' die Bemerkung gilt, daß $z''(z')$ eine in beiden Blättern von F' gleichwertige Funktion ist, was nur so denkbar ist, daß bei der Abbildung von F' auf F'' je zwei übereinanderliegenden Punkten von F' übereinanderliegende Punkte von F'' entsprechen. Die Abbildungsbeziehung ist somit eine eineindeutige reguläre Beziehung der schlichten z' -Ebene auf die schlichte z'' -Ebene. Dann aber muß die Abbildungsfunktion linear sein entgegen der Annahme ihrer Mehrdeutigkeit.

Das Ergebnis ist, daß die Funktion $\varphi(z)$, die wir oben fanden, durch die geforderten Abbildungseigenschaften bis auf eine reelle lineare Transformation bestimmt ist.

Die Frage der Bestimmtheit der Symmetrie des Bereichs B erledigt sich nunmehr mit wenigen Worten. Geht z bei der ersten symmetrischen Umformung des Bereichs B in sich selbst in $\tilde{z}_1$, bei der zweiten in $\tilde{z}_2$ über, so stellt die Beziehung $\tilde{z}_2(\tilde{z}_1)$ eine eineindeutige direkt konforme Abbildung des Bereichs B auf sich selbst dar, bei der die Begrenzungslinien einzeln in sich selbst übergehen wegen der verlangten besonderen Natur der symmetrischen Umformung. Es muß nun gezeigt werden, daß $\tilde{z}_2 \equiv \tilde{z}_1$ ist. Dazu genügt es, nachdem die Abbildung des Bereichs B auf einen Schlitzbereich B' bekannt ist, den analogen Satz für den Bereich B' anzusetzen, d. h. zu zeigen, daß B' nur durch Vermittelung der identischen Transformation in solcher Weise eineindeutig auf sich selbst abgebildet werden kann, daß jede Begrenzungslinie als Ganzes in sich übergeht. Nach dem Ergebnisse der vorstehenden Entwicklung können wir sofort sagen, daß eine solche Beziehung nur durch eine reelle lineare Transformation ausgedrückt werden kann. Daß diese jetzt nur die identische Transformation sein kann, ist dann weiter eine Folge des verlangten Selbstentsprechens der Begrenzungsschlitzte.

Wir haben uns nunmehr mit der neuen Aufgabe der Abbildung des symmetrischen Schlitzbereichs B' auf einen von drei Vollkreisen begrenzten Bereich (Kreisbereich) zu beschäftigen. Diese Aufgabe ordnet sich der

allgemeineren Aufgabe der Abbildung allgemeiner symmetrischer, mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Kreisbereiche unter, zu der wir uns nunmehr wenden.

Zweiter Teil.

Abbildung symmetrischer Bereiche auf Kreisbereiche.

§ 4. Gegeben sei in der z -Ebene ein mehrfach zusammenhängender schlichter Bereich B , der durch die Achse des Reellen in zwei zueinander symmetrische einfach zusammenhängende Hälften B_1 und B_2 zerlegt wird. Die Ordnung m des Zusammenhangs, die gleich der Anzahl der Begrenzungslinien des Bereichs ist, sei ≥ 3 . Einen solchen Bereich wollen wir in der Folge kurz als einen symmetrischen Bereich bezeichnen. Wir stellen die Aufgabe, eine Funktion $\varphi(z)$ zu bestimmen, durch deren Vermittelung der Bereich B eindeutig konform auf einen symmetrischen Kreisbereich B' abgebildet wird, d. i. auf einen von m die Achse des Reellen rechtwinklig schneidenden Kreisen begrenzten Bereich.

Indem wir die obere Hälfte B_1 von B auf die obere Halbebene abbilden und die untere Hälfte der dazu symmetrischen Abbildung unterwerfen, gewinnen wir zunächst eine Abbildung des Bereichs B auf einen von m getrennten reellen Schlitten begrenzten Bereich, den wir wieder mit B bezeichnen wollen, indem wir ihn nun zum Ausgangspunkt der Untersuchung nehmen.

Die Abbildung des symmetrischen Schlitzbereichs B auf einen (unbekannten) symmetrischen Kreisbereich B' muß sich nach mehrfach zur Anwendung gelangten Prinzipien von selbst auf dem Rande regulär verhalten. Wir behaupten nun, daß die Symmetrielinien des Bereichs B das sind die der Achse des Reellen angehörenden m in B enthaltenen Strecken bei der verlangten Abbildung in die reellen Symmetrielinien des Bereichs B' übergehen müssen. Unterwerfen wir nämlich den Bereich B' einer symmetrischen Abbildung auf einen symmetrischen Schlitzbereich B'' , so resultiert eine Abbildung des Schlitzbereichs B auf den Schlitzbereich B'' . Diese Abbildungsbeziehung kann nur durch eine reelle lineare Substitution vermittelt werden, wie aus derjenigen Überlegung folgt, die wir im vorhergehenden im Falle des dreifach zusammenhängenden Schlitzbereichs darlegten. Die gestellte Abbildungsaufgabe ist also wesentlich identisch mit der anderen, die obere Halbebene mit $2m$ Teilpunkten auf der Achse des Reellen konform auf ein Kreisbogen $2m$ -Eck mit lauter rechten Winkeln abzubilden, dessen $2m$ Polygonseiten abwechselnd Stücke der Achse des Reellen oder dazu senkrechte Halbkreisbögen sind.

Es ist leicht von vornherein darzutun, daß die gesuchte Abbildung der Halbebene B_1 auf ein Kreisbogenpolygon bzw. des symmetrischen Schlitzbereichs B auf einen symmetrischen Kreisbereich B' , abgesehen von einer reellen linearen Substitution, nur durch eine einzige Funktion $\varphi(z)$ bewirkt werden kann. Es kommt dies darauf hinaus zu zeigen, daß zwei symmetrische Kreisbereiche B' und B'' nur durch eine reelle lineare Funktion aufeinander eindeutig konform bezogen sein können. In der Tat schließen wir zunächst nach dem Vorhergehenden, daß bei einer solchen Beziehung der Bereiche B' und B'' aufeinander die reellen Symmetrielinien der Bereiche aufeinander abgebildet werden müssen, daß also eine solche Abbildungsbeziehung sich von selbst auch auffassen läßt als eine Abbildung zweier Kreisbogen- $2m$ -Ecke der erwähnten Art aufeinander, wobei die Eckpunkte des einen den Eckpunkten des anderen, die reellen Begrenzungsseiten des einen den reellen Begrenzungsseiten des anderen entsprechen. Diese Abbildungsbeziehung der Kreisbogenpolygone läßt sich nun durch fortgesetzte Spiegelung an den Begrenzungshalbkreisen zu einer eindeutigen Abbildungsbeziehung zweier Halbebenen erweitern, nämlich der oberen Halbebene des Bereichs B' einerseits und des Bereichs B'' andererseits. Dadurch aber wird die Abbildungsfunktion als eine lineare Funktion gekennzeichnet, weil das Innere eines Kreises auf sich selbst, mithin auch das Innere einer Halbebene auf das Innere einer anderen Halbebene nur durch lineare Funktionen abgebildet werden kann, die nun hier von selbst eine solche mit reellen Koeffizienten sein muß.

Daß bei dem erwähnten Spiegelungsprozeß tatsächlich eine vollständige Bedeckung der oberen Halbebene gewonnen wird, ergibt sich wohl am einfachsten folgendermaßen.

Man nehme den Kreisbogenbereich als von m endlichen Halbkreisen begrenzt an und so, daß er den unendlich fernen Punkt auf seiner Begrenzung enthält. Den Spiegelungsprozeß führe man nun in der Weise aus, daß man bei jedem Schritte das ganze durch die jeweilige vorherigen Spiegelungen gewonnene Gebiet zur Spiegelung bringt. Dann bemerkt man, da der unendlich ferne Punkt bei der Spiegelung in den Mittelpunkt des neugewählten Spiegelkreises übergeht, daß die nunmehr an Stelle des oben genannten Spiegelkreises tretenden neuen Begrenzungskreisbögen sämtlich Radien besitzen, die kleiner als die Hälfte des Spiegelkreisradius sind. Daraus ergibt sich sofort, daß es zur vollständigen Bedeckung der oberen Halbebene kommen muß, weil alle Begrenzungsradien des erweiterten Bereichs bei allseitiger Fortsetzung des Spiegelungsprozesses schließlich gleichmäßig unendlich klein werden.

Ein zweiter Beweis stützt sich auf die Bemerkung, daß die Summe der Begrenzungsradien des durch den Spiegelungsprozeß etwa bis zur

n -ten Stufe allseitig erweiterten symmetrischen Bereichs, B'_n , eine bei unbegrenzt wachsendem Index n unendlich klein werdende Größe ist. Dieser Satz wiederum hängt mit dem anderen zusammen, daß die Summe aller durch den Spiegelungsprozeß gewonnenen m -fach zusammenhängenden Bildkreisbereiche des symmetrischen Ausgangsbereichs B' konvergiert. Zum Beweise dieser Konvergenzbehauptung geben wir zwei Methoden an. Eine davon beruht auf einer Vergleichung der Kreisumfänge mit Abschnitten der Achse des Reellen. Bezüglich dieser verweisen wir auf Abh. IV, § 6 (Acta math. 41).

Bei der anderen Methode wird eine Vergleichung der erwähnten Summe mit einer geometrischen Reihe herbeigeführt folgendermaßen: Jeden der Begrenzungskreise des symmetrischen Originalbereichs B' denken wir uns mit einem größeren konzentrischen Kreise umgeben, so daß m schmale, sich gegenseitig ausschließende Kreisringe mit einem Radienverhältnis $q < 1$ entstehen. Diese Ringe werden nun in allen durch den Spiegelungsprozeß gewonnenen Bildbereichen in transformierter Gestalt wieder erscheinen. Das Radienverhältnis für einen so transformierten Ring ist immer $\leq q$, nach dem Satze, daß bei jeder direkt oder indirekt konformen Abbildung durch eine lineare Transformation das Radienverhältnis eines gegebenen, von konzentrischen Kreisen begrenzten Kreisringes kleiner oder gleich seinem ursprünglichen Werte wird. Alle denkbaren Gestalten des transformierten Kreisringes werden nämlich gefunden, wenn man die Endpunkte eines Durchmessers des Originalringes durch zwei Kreisbögen verbindet, die den inneren Kreis des Ringes berührend einschließen und nunmehr den inneren Kreis nach dem Rande zu verschiebt, indem man seinen Mittelpunkt immer auf dem Durchmesser läßt, seinen Radius aber so bestimmt, daß die erwähnten beiden Kreisbögen berührt werden. Es ist klar, daß dabei der innere Kreis desto kleiner wird, je mehr sein Mittelpunkt dem Endpunkt des Durchmessers angenähert wird. Man bemerkt also, daß für jeden durch den Spiegelungsprozeß gewonnenen Bildbereich des Originalbereichs die Summe der Radien seiner inneren Begrenzungskreise kleiner oder höchstens gleich ist q mal dem Radius des umschließenden Begrenzungskreises, womit die Konvergenzbehauptung erwiesen ist.

Die vorhergehenden Betrachtungen haben uns den *Unitätssatz* für die verlangte Abbildung des gegebenen symmetrischen Bereichs B auf einen symmetrischen Kreisbereich B' geliefert. Diese Unität besteht präzise, wenn man noch eine Normierungsbedingung für die Abbildung vorschreibt, nämlich etwa die Bedingung, daß der als innerer Punkt des Bereichs B gedachte unendlich ferne Punkt der z -Ebene bei der Abbildung fest bleiben solle und zwar so, daß die Differenz $\varphi(z) - z$, wenn

$\phi(z)$ die gesuchte Abbildungsfunktion ist, im Unendlichen den Wert 0 annehmen soll.

§ 5. Den Existenzbeweis erbringen wir nunmehr nach zwei verschiedenen Methoden, die sich beide als Approximationsverfahren durch Quadratwurzeloperationen darstellen. Die erste in diesem Abschnitt vorzubringende Methode besteht in der Anwendung unseres Schmiegungsverfahrens (Abh. II), die zweite erst im nächsten Abschnitt mit allgemeinerer Tendenz entwickelte hat besondere Eigenart; wir bezeichnen dieses zweite Verfahren als Iterationsverfahren. Beide beruhen auf der gemeinschaftlichen Grundidee, die Abbildung eines gewissen unendlich-vielblättrigen, aus lauter Halbebenen zusammengesetzten Überlagerungsbereichs auf eine gewöhnliche Halbebene bzw. Kreisfläche zu leisten.

Auf diesen Grundgedanken wird man in naturgemäßer Weise durch die Analyse des gestellten Problems geführt. Die durch eine Halbebene dargestellte obere Hälfte des Bereichs B , die wir mit B_1 bezeichnen wollen, geht bei der verlangten Abbildung in ein Kreisbogen- $2m$ -Eck mit lauter rechten Winkeln über. Der beim Unitätsbeweise zur Anwendung gelangte Spiegelungsprozeß, vermöge dessen aus der Fläche des erwähnten Kreisbogenpolygons die vollständige obere Halbebene entsteht, lehrt jetzt, daß die gesuchte Abbildungsfunktion, die ja nach den Prinzipien der Ränderzuordnung auch auf der Begrenzung regulär sein muß, die Eigenschaft hat, die Fläche eines unendlich-vielblättrigen Halbebenenystems auf eine einfache obere Halbebene abzubilden. Dieses Halbebenen-system entsteht aus B_1 und der mit B_2 zu bezeichnenden unteren Hälfte von B durch Übertragung jenes Spiegelungsprozesses. Um sie zu bilden, hat man also unendlich viele Exemplare von Halbblättern B_1 und B_2 zu nehmen und dieselben, ausgehend von einem Grundblatte B_1 , zu einer unendlich-vielblättrigen einfach zusammenhängenden Fläche $\check{B}^{(\infty)}$ zusammenzuheften, gemäß der Vorschrift, daß der Übergang von einer erreichten Stufe $\check{B}^{(n)}$ zur nächsten Stufe $\check{B}^{(n+1)}$ durch Anfügung von ebenso vielen Halbblättern, teils Halbblättern B_1 , teils Halbblättern B_2 , erfolgt, als die Fläche $\check{B}^{(n)}$ Begrenzungsstrecken hat, die über den Begrenzungsschlitz von B verlaufen. Das kommt offenbar darauf hinaus, die einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche des zum Schlitzbereiche B komplementären Schlitzbereichs $\check{B}$ zu bilden. Als komplementären Schlitzbereich wollen wir nämlich denjenigen bezeichnen, der aus B entsteht, wenn man die reellen Symmetrielinien von B als neue Schlitze wählt, die Begrenzungsschlitze von B jedoch löscht, also zu Symmetrielinien des neuen Schlitzbereichs $\check{B}$ werden läßt.

Die Lösung der jetzt vorliegenden Aufgabe, die Fläche $\check{B}^{(\infty)}$ auf die schlichte Fläche des Einheitskreises abzubilden mittels des Schmiegungsverfahrens (Abh. II), gestaltet sich folgendermaßen.

Wir führen zunächst eine vorbereitende Abbildung aus. Den einfach zusammenhängenden Bereich $\check{B}$, den man erhält, wenn man sich $m - 1$ der Begrenzungsschlitzte von $\check{B}$ als Begrenzungen aufgehoben denkt, bilden wir elementar auf die Fläche des Einheitskreises ab. Dabei gehen jene $m - 1$ Schlitzte in Schlitzte innerhalb des Einheitskreises über. Der auf diese Weise gewonnene Bildbereich von $\check{B}$ möge mit $\bar{B}$ bezeichnet werden. Wir können den Bereich $\bar{B}$ so einführen, daß er den Nullpunkt als inneren Punkt enthält. Auf den Bereich $\bar{B}$ wenden wir nun das in Abb. II entwickelte *Schmieguungsverfahren* an und stellen dadurch die *Fundamentalabbildung* des Bereichs $\bar{B}$, mithin auch *des Bereichs* $\check{B}$ her. Diese Fundamentalabbildung bedeutet eine eindeutige Abbildung der zu $\check{B}$ gehörenden einfach zusammenhängenden Überlagerungsfläche $\check{B}^{(x)}$ auf das Innere des Einheitskreises. Die Abbildungsfunktion werde mit $\varphi(z) = \zeta$ bezeichnet.

Unser Aufbau der Überlagerungsfläche $B^{(x)}$, bei der alle zur Verwendung gelangenden Halbbblätter gleichberechtigt eingehen, läßt erkennen, daß die Überlagerungsfläche durch jeden in einem ihrer Blätter über einer der Symmetrielinien von $\check{B}$ ausgeführt zu denkenden Schnitt in zwei zueinander spiegelbildlich symmetrische einfach zusammenhängende Hälften zerfällt. Dieser Schnittlinie entspricht daher im ζ -Einheitskreise eine analytische Linie λ , die diese Kreisfläche in zwei zueinander in bezug auf sie im analytischen Sinne spiegelbildlich symmetrische Hälften zerlegt. Die analytische Spiegelung an dieser Linie bewirkt eine solche eindeutige indirekt konforme Abbildung des Inneren des Einheitskreises auf sich selbst, bei der die Punkte der Linie einzeln fest bleiben. Sei $\zeta'(\zeta)$ diese Abbildungsbeziehung. Die Größe ζ' ist dann notwendig eine lineare Funktion der zu ζ konjugiert komplexen Größe $\bar{\zeta}$, weil letztere Beziehung direkt konform ist. Die Beziehung kann also durch einen Ausdruck der Form

$$(*) \quad \zeta' = \frac{\alpha \bar{\zeta} + \beta}{\gamma \bar{\zeta} + \delta}$$

zur Darstellung gebracht werden. Eine solche Beziehung ist vollständig bestimmt, wenn man zu drei Punkten ζ die zugehörigen drei Punkte ζ' kennt. Nehmen wir insbesondere drei der fest bleibenden Punkte, so läßt die Spiegelung an dem durch die drei Punkte hindurchgelegten Kreise diese drei Punkte ebenfalls fest. Es muß daher unsere durch (*) dargestellte Beziehung einfach die Spiegelung an diesem Kreise sein; und dieser Kreis muß ein Orthogonalkreis des Einheitskreises sein, weil das Innere des Einheitskreises durch die Transformation in sich übergehen soll. Damit ist gezeigt, daß die Linie λ ein Orthogonalkreisbogen des Einheitskreises ist.

Den Symmetrielinien des Bereichs $\check{B}$ entsprechen somit bei der Fundamentalabbildung lauter Orthogonalkreisbögen des Einheitskreises. Hierdurch ist, da die Fundamentalabbildung auf den Begrenzungsschlitten von $\check{B}$ regulär ist (vgl. Abh. II, § 4), das Resultat gewonnen, daß bei der Fundamentalabbildung von $\check{B}$ die obere Hälfte des Bereichs B auf ein Kreisbogenpolygon abgebildet wird, das bei Überführung des ζ -Einheitskreises in eine obere Halbebene sich als die obere Hälfte eines symmetrischen Kreisbereichs B' darstellt, wie verlangt wurde.

Nachdem hiermit die Lösung der in diesem Abschnitt gestellten Abbildungsaufgabe erbracht ist, merken wir noch besonders an, daß damit zugleich die Aufgabe der konformen Abbildung eines beliebigen gegebenen dreifach zusammenhängenden Bereichs auf einen dreifach zusammenhängenden Kreisbereich ihre vollständige Lösung erfahren hat. In solcher Kreisbereich ist übrigens immer von selbst symmetrisch, nämlich in bezug auf den gemeinschaftlichen Orthogonalkreis der Begrenzungseise als Spiegelkreis.

§ 6. Das im vorstehenden dargelegte erste Quadratwurzelverfahren steht gegenüber dem nunmehr darzulegenden zweiten Quadratwurzelverfahren (*Iterationsverfahren*) den Nachteil, daß die dabei zur Verwendung gelangenden Operationen, von den Anfangsoperationen abgesehen, nicht mehr der Symmetrie des Bereiches Rechnung tragen. Diese Forderung der Symmetrie gewinnt noch besonders an Bedeutung durch die Beziehung des behandelten Abbildungsproblems zum Problem der Reelluniformisierung reeller hyperelliptischer Kurven. Dieser Zusammenhang, der später näher bezeichnet werden wird, führt ganz naturgemäß zur Forderung der Leistung der Abbildung bzw. Uniformisierung durch eine *Folge von lauter reellen Wurzeloperationen*. Während nun das oben behandelte Abbildungsproblem nur mit demjenigen Falle des angedeuteten Uniformisierungsproblems in Zusammenhang steht, in welchem die reelle hyperelliptische Kurve vom Geschlecht p lauter, nämlich $2p + 2$ reelle Verzweigungspunkte hat, d. h. $p + 1$ reelle Züge, soll das erwähnte Uniformisierungsproblem für alle denkbaren Fälle behandelt werden, d. h. als das Problem *eine beliebige reelle hyperelliptische Kurve vom Geschlecht p* , deren reelle Züge bekanntlich in der Anzahl $1, 2, \dots, p + 1$ vorhanden sein können, *reell zu uniformisieren*. In dieser Weite der Auffassung werden wir das von uns als *Iterationsverfahren* bezeichnete Quadratwurzelverfahren in der Tat mit Erfolg zur Anwendung bringen können.

Dritter Teil.

Uniformisierung reeller hyperelliptischer Kurven (erster Abschnitt):

Problemstellung und Analyse desselben; Zusammenhang mit dem Problem der Fundamentalabbildung schlichter, mehrfach zusammenhängender Bereiche.

§ 7. Gegeben sei eine beliebige reelle hyperelliptische Kurve vom Geschlecht p . Sie werde durch eine Gleichung

$$(*)' \quad w^2 = \pm (z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_{2p+2})$$

oder.

$$(*)'' \quad w^2 = \pm (z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_{2p+1})$$

dargestellt, in der alle Größen a voneinander verschieden, und zwar entweder alle reell oder nur eine gerade Anzahl reell, die übrigen paarweise konjugiert imaginär zu denken sind. Auch der Fall, daß keine der Größen a in $(*)$ reell ist, ist in Betracht zu ziehen, in welchem Falle dann allerdings nur das Pluszeichen zugelassen werden kann, wenn eine reelle Kurve vorliegen soll. In allen übrigen Fällen kann man durch eine umkehrbare rationale elementare reelle Transformation stets zu der Form

$$(*) \quad w^2 = (z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_{2p+2})$$

gelangen, die wir nunmehr zugrunde legen.

Zur Kurve (z, w) bzw. zur Funktion $w(z)$ gehört eine zweiblättrige Riemannsche Fläche F mit $2p + 2$ Windungspunkten. Den reellen Zügen der Kurve entsprechen auf der Riemannschen Fläche geschlossene Linienzüge (*Realitätszüge*), deren einzelner, abgesehen von einem durch das Unendliche gehenden, in einem Hin- und Hergang auf der Achse des Reellen zwischen zwei benachbarten reellen Windungspunkten vollständig durchlaufen wird. Sind keine reellen Windungspunkte vorhanden, so figuriert die vollständige Achse des Reellen, in jedem der Blätter ausgezogen, als Realitätszug; dabei sind noch zwei Unterfälle zu unterscheiden, je nachdem p gerade oder ungerade ist. Im ersten Falle haben wir, weil die obere Halbebene und untere Halbebene je eine ungerade Anzahl von Windungspunkten darbieten, nur einen durch das Unendliche der Riemannschen Fläche geschlossenen, von der zweimal durchlaufen zu denkenden Achse des Reellen gebildeten Realitätszug, im anderen Falle zwei getrennte Realitätszüge, deren jeder von der einfach durchlaufen zu denkenden Achse des Reellen gebildet wird. Wenn reelle Windungspunkte in der

ahl $2q$ vorhanden sind, so ist q die Anzahl der reellen Züge der Kurve und damit zugleich der Realitätszüge auf der Riemannschen Fläche.

Denken wir uns die Riemannsche Fläche längs sämtlicher Realitätszüge aufgeschnitten, so zerfällt sie entweder in zwei zueinander symmetrische, einfach zusammenhängende Hälften und wird dann nach Kleins Orthosymmetrie genannt, oder sie bleibt ein zusammenhängendes Ganzes und heißt dann *diasymmetrisch*, eine Bezeichnungsweise, die auch auf die Kurven übertragen wird. Eine orthosymmetrische Kurve bzw. Riemannsche Fläche haben wir dann und nur dann, wenn entweder sämtliche Windungspunkte reell oder sämtliche Windungspunkte imaginär sind.

Als *lokale Uniformisierung* einer Kurve oder allgemein eines analytischen Gebildes (z, w) bezeichnen wir die Einführung einer veränderlichen τ , mit deren Hilfe die Umgebung einer Stelle (z_0, w_0) regulärer algebraischen Charakters dieses Gebildes eindeutig in Parameterform dargestellt werden kann, wobei dann τ selbst auf ein genügend kleines Gebiet (Umgebung einer Stelle t_0 , die auch mit ∞ zusammenfallen kann) beschränkt ist. Eine solche lokale Uniformisierung ergibt sich auf die einfachste Weise stets in der Gestalt $t = z - z_0$ oder $\sqrt[n]{z - z_0}$, wenn n endlich ist, in der Gestalt $\frac{1}{z}$ bzw. $\sqrt[n]{\frac{1}{z}}$, wenn z_0 unendlich ist. Die Zahl n ist dabei als diejenige ganze Zahl gewählt zu denken, die anzeigt, wieviel Funktionszweige $w(z)$ um den Punkt z_0 herum an der betrachteten Stelle (z_0, w_0) zusammenhängen. Bei dieser Wahl hat die Hilfsveränderliche t die Eigenschaft, als Funktion des Paares (z, w) oder, was auf dasselbe hinauskommt, der Stelle z_0 auf der die Verzweigung der Funktion $w(z)$ präzise darstellenden Riemannschen Fläche F betrachtet, an der Stelle (z_0, w_0) *relativ unverzweigt* zu sein. Sie hat die Eigenschaft, die Umgebung des Punktes (z_0, w_0) des Gebildes (z, w) bzw. der Riemannschen Fläche F eineindeutig konform auf ein schlichtes t -Gebiet, nämlich die Umgebung der Stelle $t = 0$, zu übertragen. Die allgemeinste relativ unverzweigte, lokale uniformisierende Variable τ läßt sich durch eine reguläre Potenzreihe der Gestalt

$$\left\{ (\tau - \tau_0) \text{ oder } \frac{1}{\tau} \right\} = c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \dots + (c_1 \neq 0)$$

dargestellt. Außer relativ unverzweigten lokalen uniformisierenden Veränderlichen gibt es auch solche mit *Relativverzweigung*. So kann man an Stelle von $\sqrt[n]{z - z_0}$ offenbar $\sqrt[x \cdot n]{z - z_0}$ treten lassen, wobei x eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet. Die allgemeinste derartige uniformisierende Variable mit der *Relativverzweigungszahl* x entsteht aus t durch eine beliebige Transformation der Gestalt

$$\left\{ (\tau - \tau_0) \text{ oder } \frac{1}{\tau} \right\} = c_1 \sqrt[x]{t} + c_2 (\sqrt[x]{t})^2 + c_3 (\sqrt[x]{t})^3 + \dots + (c_1 \neq 0).$$

Dabei entsprechen jeder Stelle einer gewissen Umgebung des Punktes (z_0, w_0) ∞ verschiedene Werte τ in der Umgebung von τ_0 bzw. ∞ , umgekehrt aber jeder Stelle einer gewissen Umgebung der Stelle τ_0 bzw. ∞ nur eine Stelle der Umgebung von (z_0, w_0) .

Hat man es jetzt mit einer reellen analytischen Kurve zu tun, so wird man für einen reellen Kurvenpunkt (z_0, w_0) algebraischen Charakter auf einem reellen Zuge der Kurve naturgemäß die Forderung nach reellen lokal uniformisierenden Veränderlichen stellen. Die Potenzreihenentwicklung des reellen Zuges für die Umgebung des betrachteten reellen Punktes lehrt, daß ein derartiger Zug stets eine unzweideutig bestimmte analytische Fortsetzung über den Punkt (z_0, w_0) hinaus hat oder, wie man auch sagen kann, in einem solchen Punkte niemals blind endigen oder einer Gabelung unterworfen sein kann, und daß man mit Hilfe von Wurzelgrößen der oben angegebenen Gestalt, ev. unter Einfügung eines Minuszeichens vor dem Radikanden, immer eine reelle lokale Uniformisierung durchführen kann, wobei dann allerdings eine Relativverzweigung nicht mehr in Betracht kommen kann, sofern man die Forderung der Realität für ein nach beiden Seiten durch den Punkt (z_0, w_0) geführtes Kurvenstück stellt.

Nach diesen Vorbereitungen wird man die Bedeutung der folgenden Problemstellung verstehen.

Uniformisierungsproblem: Es soll für die reelle hyperelliptische Kurve (*), die als komplexes Gebilde eine geschlossene Mannigfaltigkeit darstellt und geometrisch durch die geschlossene zweiblättrige Riemannsche Fläche F repräsentiert wird, eine in dem ganzen Gebilde bzw. auf der ganzen Riemannschen Fläche relativ unverzweigte, für die analytische Fortsetzung auf der Riemannschen Fläche nirgends Grenzstellen ihrer Definition darbietende Größe ζ in Form einer einheitlichen analytischen Funktion ermittelt werden, die für alle Stellen des Gebildes den Charakter einer lokalen uniformisierenden Variablen darbietet, außerdem der Bedingung genügt, auf den reellen Zügen der Kurve (z, w) , Realitätszügen der Fläche F , nur reelle Werte anzunehmen, d. h. dort allenthalben die Natur einer reellen lokalen uniformisierenden Variablen zu besitzen, darüber hinaus dann schließlich noch der letzten Bedingung genügt, daß eine Uniformisierung des ganzen Gebildes (z, w) zustande kommt, d. h., daß $z(\zeta)$ und $w(\zeta)$ auch schlechthin, d. h. hinsichtlich ihres ganzen durch analytische Fortsetzung zu gewinnenden Existenzbereichs, eindeutige analytische Funktionen der Veränderlichen ζ werden^{*)}.

^{*)} Vgl. hiermit das Theorem 1a in meiner Note „Über die Uniformisierung reeller algebraischer Kurven“ (Gött. Nachr. 1907) sowie Problem 2a in Abschnitt E, I, der Abhandlung „Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven I“ (Math. Ann. 67, 1909). Insbesondere wird in erstgenanntem Artikel bereits die Überflüssigkeit

Von der gesuchten Größe ζ ist nicht verlangt worden und kann auch allgemein nicht verlangt werden, daß diese Größe relativ zum *ganzen* Gebilde (z, w) eindeutig sein soll. Es wird sich vielmehr herausstellen, daß diese Größe relativ zum Gebilde (z, w) stets unendlich vieldeutig ist, ferner, daß die zwischen je zwei relativen Zweigen der Funktion $\zeta(z, w)$ bestehende analytische Beziehung eine lineare Beziehung ist, die dann natürlich durch eine reelle lineare Substitution dargestellt wird. Das Gleiche wird sich ergeben für die Zweige der Funktion $\zeta(z)$, d. i. der Größe ζ , relativ zur gewöhnlichen z -Ebene betrachtet. Schließlich wird sich zeigen, daß die Größe ζ durch ihre in obiger Problemstellung geforderten Eigenschaften, abgesehen von einer reellen linearen Transformation, völlig bestimmt ist.

§ 8. Zur Behandlung des Problems übergehend, nehmen wir zunächst eine *Analyse* vor, der wir hernach die *Synthese* folgen lassen werden. Durch die Analyse soll die Größe $\zeta(z, w)$ ihrem Wesen nach so weit erkannt werden, daß sie als *Abbildungsfunktion* einer wohlcharakterisierten einfach zusammenhängenden, unendlich-vielblättrigen Riemannschen Fläche erscheint. Die Synthese wird dann diese Abbildung zu leisten haben. Wir werden dieselbe durch das oben bezeichnete *Iterationsverfahren* leisten.

Zunächst werde festgestellt, daß die gesuchte Größe ζ an einem nicht-reellen Kurvenpunkte (d. i. keinem reellen Zuge angehörenden Punkte) keinen reellen Wert annehmen kann. Da nämlich die Größe ζ auf den reellen Zügen der Kurve reell ist, müßte sie bei Annahme eines reellen Wertes an einem nichtreellen Punkte auf Grund des Spiegelungsprinzips denselben reellen Wert auch an dem konjugierten Punkte des Gebildes annehmen. Dies würde aber in Widerspruch mit der vorausgesetzten Eindeutigkeit der analytischen Funktionen $z(\zeta)$ und $w(\zeta)$ stehen, insofern, als hier einem und demselben Werte ζ zwei verschiedene Werte z oder w zugeordnet sein würden. Diese Funktionen würden, wenn ζ_0 der in Rede stehende reelle Wert ist, in der Umgebung von ζ_0 zwei dort getrennte, auf einem passend gewählten Wege der ζ -Ebene durch analytische Fortsetzung zusammenhängende Zweige besitzen.

Überhaupt können wir sagen, daß die Funktion $\zeta(z, w)$ niemals, weder an zwei verschiedenen Stellen der Riemannschen Fläche F noch

der Forderung der Linearität der Zweigs substitutionen hervorgehoben. Der Nachweis dieser Behauptung kann auch a posteriori dadurch geliefert werden, daß man zunächst ζ mit linearen Zweigs substitutionen ermittelt. Die dann in der ζ -Ebene auftretende unendliche Menge diskreter Grenzpunkte läßt sich in endlich viele Kurven von beliebig kleiner Gesamtlänge einschließen. Ist ζ^* dann eine ζ -Funktion im weiteren Sinne, so findet man $\zeta^* - \zeta$ als eine auch in den erwähnten Grenzpunkten reguläre Funktion von ζ , daher als eine lineare Funktion.

in zwei verschiedenen Zweigen einer und derselben Stelle der Fläche F , einen und denselben Wert annehmen kann; weil dies nämlich mit der Eindeutigkeit der Funktionen $z(\zeta)$ und $w(\zeta)$ in Widerspruch stehen würde. Die Funktion $\zeta(z, w)$ ist somit, wie wir sagen wollen, eine *einfachwertige Funktion*.

Der Sinn des Vorstehenden kommt zu einem besonders anschaulichen Ausdrucke, wenn wir die zur Funktion $\zeta(z, w)$ gehörende *Riemannsche Relativfläche* über der Grundfläche F in die Betrachtung einführen. Diese Relativfläche oder *Überlagerungsfläche* der Fläche F besitzt keine relativen Windungspunkte. Sie werde mit $F^{(\infty)}$ bezeichnet. Die Funktion $\zeta(z, w)$ ist auf ihr gerade eindeutig. Durch die Funktion $\zeta(z, w)$ wird die Fläche $F^{(\infty)}$, weil diese Funktion einfachwertig ist, eineindeutig auf ein Gebiet $B^{(\infty)}$ abgebildet, das keinen Punkt der Ebene mehrfach bedecken kann, d. h. auf einen schlichten Bereich, dessen Zusammenhang sich übrigens als unendlich hoch herausstellen wird. Dieser Bereich $B^{(\infty)}$ wird ferner aus Gründen der Symmetrie, wegen der Realität der Größe ζ auf den Realitätszügen der Fläche F , durch die Achse des Reellen in zwei zueinander symmetrische Hälften zerlegt. Aus der Eineindeutigkeit der Beziehung der beiden Flächen $F^{(\infty)}$ und $B^{(\infty)}$ aufeinander folgt die Gleichheit der abstrakt topologischen Qualitäten beider Flächen. Insbesondere wird also die Fläche $F^{(\infty)}$ durch jeden auf ihr geführten Rückkehrschnitt in zwei getrennte Stücke zerfallen. Wir bringen diese Gleichwertigkeit zum Ausdruck, indem wir die Fläche $F^{(\infty)}$ als *schlichtartig* bezeichnen, wie wir $B^{(\infty)}$ als *schlicht* bezeichnen.

Unsere weiteren Betrachtungen der Analyse sollen uns zu dem Ergebnis führen, daß die beiden symmetrischen Hälften des Bereichs $B^{(\infty)}$ *einfach zusammenhängend* sind, daß sie überhaupt nichts anderes sein können als die eine obere, die andere eine untere Halbebene, während der Bereich $B^{(\infty)}$ selbst von der ganzen, in unendlich vielen diskreten reellen Punkten punktiert zu denkenden ζ -Ebene gebildet wird.

Zum Zwecke dieses Nachweises denken wir uns die Riemannsche Fläche F längs der Realitätszüge aufgeschnitten, wodurch sie entweder ein zusammenhängendes Ganze bleibt, F' , oder in zwei zueinander symmetrische Hälften zerfällt, deren eine dann mit F' bezeichnet werde. Wir betrachten nun die Größe $\zeta(z, w)$, soweit sie auf F' erklärt ist, indem wir bei der Veränderung der Stelle (z, w) die Überschreitung der Begrenzungslinien von F' ausschließen. Die Funktion $\zeta(z, w)$ wird selbstverständlich auch auf F' eine einfachwertige Funktion ohne Relativverzweigung sein. Die Vieldeutigkeitsstruktur der $\zeta(z, w)$ erschließen wir, indem wir die Fläche F' durch Q getrennte Querschnitte von Rand zu Rand in eine einfach zusammenhängende Fläche F'_0 verwandeln, die von

in einem einzigen Linienzuge begrenzt ist, der aus $2Q$ Querschnittseiten und Q Randseiten in abwechselnder Reihenfolge besteht. Die Zahl Q bezeichnet hierbei den Zusammenhang der Fläche F' , der gleich $p+1$ ist, wenn einer der beiden orthosymmetrischen Fälle vorliegt, in allen diasymmetrischen Fällen dagegen gleich $2p+2$. Bei der durch die Funktion $\zeta(z, w)$ geleisteten konformen Abbildung muß, wenn wir etwa einen Zweig $\zeta^{(0)}(z, w)$ fixieren, der Fläche F'_0 ein etwa in der oberen ζ -Halbebene gelegenes $4Q$ -Eck $\Pi^{(0)}$ entsprechen, dessen Seiten abwechselnd aus Stücken der Achse des Reellen und die Endpunkte dieser Linienstücke sukzessive verbindenden Linien der oberen Halbebene bestehen (vgl. Fig. 6, in der $Q=2$ angenommen ist).

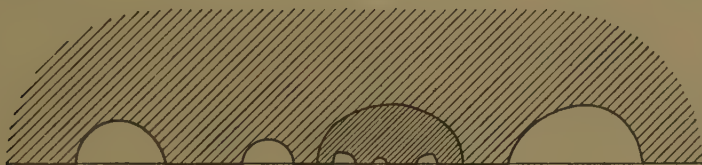


Fig. 6.

Aus der Einfachwertigkeit der Funktion $\zeta(z, w)$ ergibt sich ohne weiteres, daß das Bild der Fläche F'_0 , das der Funktionszweig $\zeta^{(0)}(z, w)$ entwirft, ein schlichter Bereich sein muß, wie in Fig. 6 dargestellt. Wir können, ohne die Allgemeinheit unserer Untersuchung zu beeinträchtigen, annehmen, daß der unendlich ferne Punkt auf einer Randseite des Polygons $\Pi^{(0)}$ liegt. Nunmehr lassen wir den Punkt (z, w) , der zunächst auf F'_0 beschränkt war, einen der begrenzenden Querschnitte überschreiten. Dementsprechend wird der Punkt ζ das Polygon $\Pi^{(0)}$ verlassen, womit angezeigt ist, daß wir von dem Zweige $\zeta^{(0)}$ zu einem wesentlich neuen Zweige $\zeta^{(1)}$ übergehen. Die Einfachwertigkeit der Funktion $\zeta(z, w)$ bringt jetzt mit sich, daß das schlichte Polygon $\Pi^{(1)}$, das als Bild von F'_0 durch den Funktionszweig $\zeta^{(1)}$ entworfen wird, schlicht neben das Polygon $\Pi^{(0)}$ abgelagert sein muß, indem es mit diesem nur eine Querschnittseite gemeinchaftlich hat (vgl. Fig. 6). In Weiterverfolgung dieses Gedankens erkennt man nunmehr, daß den unendlich vielen verschiedenen, bei beliebig wiederholten Überschreitungen der F'_0 begrenzenden Querschnitte sich einstellenden Zweigen $\zeta^{(v)}$ der Funktion $\zeta(z, w)$ unendlich viele sich glatt nebeneinander lagernde, sämtlich voneinander verschiedene Bereiche $\Pi^{(v)}$ entsprechen, die nun offenbar in ihrer Gesamtheit ein einfach zusammenhängendes Gebiet der oberen ζ -Halbebene bedecken.

Lassen wir nunmehr auch die Beschränkung der Veränderlichkeit auf F' fallen, gestatten also die Überschreitung auch der Realitätszüge, so

bemerken wir wegen des durch die Realitätsbedingungen bewirkten symmetrischen Verhaltens der Funktion $\zeta(z, w)$, daß unser oben gewonnenes einfach zusammenhängendes Gebiet nichts anderes ist als die eine Hälfte des unendlich vielfach zusammenhängenden schlichten Bereichs $B^{(\infty)}$; dieser entsteht aus jener oberen Hälfte durch Zusammenheftung derselben mit einer symmetrisch zu bildenden unteren Hälfte längs der unendlich vielen durch die Abbildung mittels $\zeta(z, w)$ tatsächlich gewonnenen Stücke der Achse des Reellen, von denen Teile in Fig. 6 sichtbar sind.

Der Gewinn der vorhergehenden Überlegung besteht zunächst in dem Ergebnis, daß der unendlich-vielfach zusammenhängende Bereich $B^{(\infty)}$ durch die Achse des Reellen in zwei einfach zusammenhängende, zueinander symmetrische Halbbereiche zerlegt wird. Daß die obere und untere Hälfte des Bereichs $B^{(\infty)}$ je eine *volle Halbebene* ausmachen, geht aus diesen Überlegungen noch nicht hervor. Dies weitere Ergebnis läßt sich jedoch jetzt, nachdem das topologische Gesetz der Parzellierung unserer Halbbereiche klargelegt ist, durch eine Anwendung unseres Verzerrungssatzes ableiten.

Dazu denken wir uns die auf der Achse des Reellen liegenden Eckpunkte des Polygons $\Pi^{(0)}$ je in ein kleines Intervall der Achse des Reellen eingebettet. Diese Intervalle (Hilfsintervalle) mögen so klein gewählt sein, daß sie in ihrer Gesamtheit unter Hinzunahme auch ihrer unendlich vielen Bilder in den Polygonen $\Pi^{(\nu)}$ keine auch nur teilweise Bedeckung irgend zweier darbieten. Man erreicht dies, indem man die $2Q$ Endpunkte der Q Querschnitte in ebenso viele den Realitätszügen angehörende, getrennte Intervalle einbettet und nun deren Abbildungen durch die unendlich vielen Zweige $\zeta^{(\nu)}$ aufsucht.

Die Summe der Längen aller so erhaltenen reellen Intervalle in der ζ -Ebene ist jedenfalls eine endliche Größe. Der Verzerrungssatz II (Abh. V, S. 218–219) lehrt dann, daß die Größe

$$\left| \frac{d\zeta^{(\nu)}}{d\zeta^{(0)}} \right|,$$

gebildet längs den begrenzenden Querschnitten von $\Pi^{(0)}$ unter Einschluß auch der anstoßenden Hilfsintervalle, zu dem entsprechenden Werte für die Endpunkte jeder einzelnen Querschnittseite in einem Verhältnis steht, das zwischen zwei endlichen Schranken bleibt, die auch unabhängig von der Wahl des Index ν sind. Weil die Hilfsintervalle mit wachsendem Index ν unendlich klein werden, ergibt sich nun, daß das gleiche für die Ableitungswerte $\left| \frac{d\zeta^{(\nu)}}{d\zeta^{(0)}} \right|$ an den Querschnittsendpunkten eintreten muß.

Dieses Unendlichkleinwerden überträgt sich nun weiter von den End-

unkten der Querschnittseiten auf die ganzen Querschnittseiten und hat
r Folge, daß die Längen ihrer Bilder mit wachsendem Index ν un-
endlich klein werden. Damit ist bewiesen, daß die Bereiche $\Pi^{(\nu)}$, indem
e sich glatt nebeneinander lagern, schließlich die ganze obere Halbebene
bedecken, wobei auf der Achse des Reellen selbst nur eine Menge von
endlich vielen diskreten Punkten frei bleiben kann.

§ 9. Wir sind damit zu derjenigen Auffassung gelangt, deren Be-
ründung wir als das Ziel der Analyse hinstellten. Die Funktion $\zeta(z, w)$
scheint erklärt als eine Funktion, die eine wohldefinierte unendlich-
elblättrige, einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche $F^{(\infty)}$ auf
e obere ζ -Halbebene eineindeutig abbildet. Die Fläche $F^{(\infty)}$ ist die
u F' gehörende, einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche ohne
relative Windungspunkte. Wir übersehen auch den Prozeß, der uns diese
berlagerungsfläche liefert. Sie ist aus unendlich vielen Exemplaren F'_0 nach
nem übersichtlichen Heftungsverfahren aufzubauen. Die Fläche $F^{(\infty)}$ ist
durch ihre angegebenen Eigenschaften völlig bestimmt unabhängig von
er besonderen Art ihrer Herstellung. Denn bei Annahme zweier der-
artigen Flächen könnte man diese beiden Flächen durch Koinzidenz-
ziehung ohne Relativverzweigung, also wegen des einfachen Zusammen-
anges der Flächen eineindeutig aufeinander abbilden, was nur ein anderer
usdruck der Identität der beiden Flächen ist.

Die vorstehenden Überlegungen zeigen uns weiter, daß der Zusammen-
ang zwischen je zwei Zweigen der Funktion $\zeta(z, w)$ *linear* sein muß,
ämlich durch eine reelle lineare Substitution darstellbar. Denn die ana-
ytische Beziehung zwischen irgendzwei Zweigen stellt sich als eine Ab-
ildung zweier Polygone $\Pi^{(\nu)}$, die jetzt nicht derselben Halbebene (obere
der untere Halbebene) anzugehören brauchen, aufeinander dar, eine Ab-
ildung, die wegen der analytischen Fortsetzbarkeit der beiden betrachteten
unktionszweige über die ganze parzellierte Halbebene hin definiert werden
ann. In dieser Halbebene ist nun die Abbildungsbeziehung unverzweigt,
olglich eineindeutig und mithin linear.

Wir können die Abbildungscharakteristik der Funktion $\zeta(z, w)$ noch
eiter führen. Während wir bisher nur die lineare Abhängigkeit der
elativen Zweige feststellten, wollen wir jetzt noch die lineare Abhängig-
eit irgendzweier Zweige der Funktion $\zeta(z)$ nachweisen. Diese Funktion
t auch eine *einfachwertige* Funktion. Sie ist jedoch relativ zur schlichten
-Ebene *verzweigt*, nämlich in den Windungspunkten a . Wir betrachten
e zunächst nur soweit, wie sie in F' erklärt ist, d. i. in dem schlichten
ebiet, über das F' ausgebreitet ist. Dieses Gebiet F' wird im Falle
es Fehlens reeller Verzweigungsstellen a von der oberen Halbebene ge-
ildet, in jedem anderen Falle von der ganzen, längs endlich vieler auf

der Achse des Reellen liegender Schlitzte aufgeschnittenen Ebene. Die Funktion $\zeta(z)$ leistet dann eine, allgemein zu reden, relativ verzweigte Abbildung der Fläche F' auf die obere ζ -Halbebene. Die Relativverzweigung innerhalb F' fällt nur dann weg, wenn sämtliche $2p+2$ Verzweigungspunkte a reell sind, mithin F' $(p+1)$ -fach zusammenhängend ist.

Daß nun auch je zwei Zweige der in F' erklärten Funktion $\zeta(z)$ durch eine reelle lineare Substitution zusammenhängen, folgt daraus, daß sich jetzt wieder eine entsprechende eineindeutige Abbildung einer ζ -Halbebene ergibt, weil offenbar auch an den innerhalb F' liegenden Verzweigungspunkten die Beziehung der betrachteten Zweige eine solche ist, die, in die ζ -Ebene übertragen, keine Relativverzweigung dieser Beziehung ergibt, vielmehr schlichtes Gebiet eineindeutig auf schlichtes Gebiet überträgt. Die Funktion $\zeta(z)$ weist, wenn von der Beschränkung der Variabilität auf F' abgesehen wird, allgemein zu reden auch solche reellen linearen Zweigsubstitutionen auf, die eine Vertauschung der oberen und unteren Halbebene bewirken. Wir erhalten eine solche Substitution immer dann, wenn wir, von einem Zweige $\zeta(z)$ ausgehend, diesen auf einem geschlossenen Wege analytisch fortsetzen, der eine ungerade Anzahl mal eine Begrenzungsstrecke des Bereichs F' schneidet. Insbesondere wird sich immer also dann eine derartige Substitution ergeben, wenn man z eine einfache Umkreisung eines reellen Verzweigungspunktes ausführen läßt. Diese Substitution ist, weil sie bei Wiederholung der Umkreisung zur Identität zurückführen muß, eine elliptische Substitution der Periode 2. Eine solche ergibt sich auch bei Umkreisung eines imaginären Verzweigungspunktes, wobei jedoch keine Vertauschung der Halbebenen bewirkt wird. Der Fall, in welchem keine reellen Verzweigungspunkte vorhanden sind, ist vor allen anderen Fällen besonders dadurch ausgezeichnet, daß die Funktion $\zeta(z)$ nur reelle Substitutionen mit positiver Koeffizientendeterminante, das sind solche ohne Halbebenenvertauschung, erleidet. In der Tat muß man, um eine geschlossene Linie in der z -Ebene auszuführen, die Achse des Reellen immer eine gerade Anzahl mal schneiden.

Ein besonderes Charakteristikum, durch welches die diasymmetrischen Fälle durchgängig von den beiden orthosymmetrischen Fällen unterschieden sind, heben wir noch hervor. Es ist dies die Besonderheit der Funktion $\zeta(z, w)$, auch als relative Funktion betrachtet Substitutionen mit negativer Koeffizientendeterminante zu erleiden. Denn nur die diasymmetrischen Flächen F haben die Eigenschaft, daß man auf ihnen geschlossene Wege beschreiben kann, bei denen die Realitätszüge nur einmal getroffen werden, welch letzterer Umstand bedingt, daß man sich mit der Größe ζ bei

urchlaufung des betreffenden Weges aus der einen in die andere Halbebene begibt, ohne wieder zur ursprünglichen Halbebene zurückzukehren.

Die durch die vorstehenden Überlegungen gewonnene Auffassung der Funktion $\zeta(z, w)$ als einer Funktion $\zeta(z)$ ist von besonderer Wichtigkeit. Sie gibt uns Veranlassung, die einfach zusammenhängende Fläche $F'^{(\infty)}$, die wir vorhin relativ zu F' aufbauten, auch von F' aus zu konstruieren. Das kann in folgender Weise geschehen.

Zunächst im Falle fehlender reeller Verzweigungspunkte, in welchem F' von der oberen Halbebene gebildet wird, verbinden wir die $p+1$ Stellen a der oberen Halbebene durch getrennt verlaufende Schnitte in dieser Halbebene mit der Achse des Reellen. Der so entstandene einfach zusammenhängende Bereich

werde mit $F'_0 = F'^{(0)}$ bezeichnet.

Nunmehr denke man sich längs jedes der Schnitte ein Neuexemplar F'_0 durch Überkreuzverheftung angelegt, wobei jedesmal im be-

treffenden Punkte a ein Windungspunkt erster Ordnung entsteht. Wir haben dadurch einen von $p+2$ Halbebenen gebildeten Bereich $F'^{(1)}$ gewonnen, der in jedem Blatte p Einschnitte hat. Diese Einschnitte werden nun wieder durch Anheftung je eines Neuexemplars F'_0 zum Verschwinden gebracht, wodurch neue Windungspunkte entstehen. Das Verfahren wird in infinitum fortgesetzt. Es ergibt sich eine Grenzfläche

$$F'^{(\infty)} = \lim_{n \rightarrow \infty} F'^{(n)}$$

als Grenze immer ausgedehnterer einfach zusammenhängender Bereiche. Diese Fläche $F'^{(\infty)}$ ist wieder die oben mit $F'^{(\infty)}$ bezeichnete Überlagerungsfläche.

In den übrigen Fällen, in denen also reelle Verzweigungspunkte vorhanden sind, wird F' von der ganzen, durch endlich viele Schlitze beschnittenen Ebene gebildet. Jetzt werden wir den Bereich F' durch Querschnitte, die man zweckmäßig auf der Achse des Reellen verlaufen läßt, und von den imaginären Stellen a ausgehende Einschnitte, die man zweckmäßig paarweise symmetrisch anordnet, in einen einfach zusammenhängenden, von der ganzen Ebene gebildeten Bereich F'_0 verwandeln (wie in den Figuren durch Stricheln angedeutet ist), eine Aufschneidung, die wir zweckmäßig noch durch einen weiteren reellen Querschnitt (in Figur punktiert) vervollständigen, wodurch F'_0 in zwei zueinander symmetrische Hälften f_1 und f_2 verwandelt wird, die die Form eingeschnittener Halbebenen besitzen. Wie nunmehr aus lauter Blättern F'_0 oder f_1 und f_2



Fig. 7a.

der Aufbau der einfach zusammenhängenden Fläche $F'^{(\infty)} = F^{(\infty)}$ zu erfolgen hat, dürfte wohl keiner weiteren Erläuterung bedürfen.

§ 10. Hervorzuheben ist hier noch der Zusammenhang des durch Fig. 7 b dargestellten Falles der $(p+1)$ -zügigen hyperelliptischen Kurve vom Geschlecht p mit dem im zweiten Teil diskutierten Problem der konformen



Fig. 7b.



Fig. 7c.

Abbildung eines $(p+1)$ -fach zusammenhängenden schlichten symmetrischen Schlitzbereichs auf einen symmetrischen Kreisbereich. In der Tat wird hier wie dort eine Überlagerungsfläche derselben Art gebildet und ihre Abbildung auf eine schlichte Halbebene gefordert. Der genauere Sachverhalt ist der, daß die zum Falle der Fig. 7b gehörende Uniformisierungsfunktion zugleich die Kreisbereichabbildung für den zu

F' komplementären Schlitzbereich leistet, worunter derjenige symmetrische Schlitzbereich verstanden wird, dessen Begrenzungsstrecken die Begrenzungsstrecken des Bereichs F' zur vollen Achse des Reellen ergänzen.

§ 11. Wir werden in Berücksichtigung des Dargelegten zu der Auffassung der Größe $\zeta(z)$ als einer *Fundamentalveränderlichen* des schlichten Gebiets F' geführt, wie wir sie in Abh. II auf die allgemeinste Weise für schlichte Gebiete bestimmt haben. Die Funktion $\zeta(z)$ leistet nämlich eine Fundamentalabbildung des schlichten Bereichs F' , ohne Relativverzweigung im Falle der $(p+1)$ -zügigen Kurve, mit Relativverzweigung in allen anderen Fällen. Die Relativverzweigung findet in den imaginären Verzweigungsstellen a statt. Die Verzweigungszahlen sind sämtlich gleich 2. Indem wir diese Auffassung nennen, haben wir uns zugleich in den tatsächlichen Besitz der Funktion $\zeta(z)$ und damit aller gesuchten uniformisierenden Variablen gesetzt. Denn die Fundamentalveränderlichen der erwähnten Art sind in Abh. II sämtlich mit Hilfe unseres Schmiegungsverfahrens bestimmt worden. In allen Fällen würde also die Aufgabe durch eine unendliche Folge von Quadratwurzeloperationen gelöst sein. Diese Operationen tragen jedoch der Symmetrie der Problemstellung nicht Rechnung. Dies wird voll und ganz erst bei dem von uns darzulegenden *Iterationsverfahren* der Fall sein, das sich uns als das ideale Lösungsverfahren für die gestellten Uniformisierungsprobleme darstellt.

Die im vorhergehenden gegebene Charakterisierung der Größe $\zeta(z)$ in Beziehung zur schlichten z -Ebene gestattet noch eine Modifikation, die wir mit Nutzen nennen. Der Leser wird nach allem vorhergehenden ihre Richtigkeit sofort ohne weitere Erläuterung verstehen.

Wir legen jetzt die schlichte Vollebene zugrunde, markieren in ihr die Verzweigungsstellen a der hyperelliptischen Kurve und bezeichnen die reellen Strecken auf der Achse des Reellen, längs welcher $w(z)$ reell ist, als *Realitätszüge*, welche also auch $\zeta(z)$ reell sein soll, als *Realitätszüge*. Diese Realitätszüge wurden vorhin als Einschnitte der z -Ebene eingeführt. Die Größe $\zeta(z)$ ist dann vollständig charakterisiert durch folgende Eigenschaften:

Sie ist *erstens* eine allenthalben mit dem Charakter einer algebraischen Funktion erklärte einfachwertige Funktion, die nur an den Stellen a , und nur dort in allen ihren Zweigen, Verzweigungspunkte erster Ordnung besitzt; sie nimmt *zweitens* auf den Realitätszügen, und nur auf diesen, nur reelle, und zwar nur reelle Werte an.

Daß die reellen Verzweigungspunkte a solche erster Ordnung sind, versteht sich, beiläufig bemerkt, von selbst als Folge der Einfachwertigkeit in Verbindung mit der gestellten Realitätsbedingung. Daß die Zweige der Funktion durch lineare Substitutionen untereinander verknüpft sind, ergibt sich auf Grund früherer Betrachtungen.

Es ist zweckmäßig, daß wir uns in der Folge bis auf weiteres an der Auffassung halten, die die schlichte z -Ebene zugrunde legende Auffassung halten. Die Riemannsche Fläche der Funktion $\zeta(z)$ werden wir jetzt zweckmäßig mit $F^{(\infty)}$ bezeichnen. Sie zerfällt in zwei einfach zusammenhängende Hälften $F_1^{(\infty)}$ und $F_2^{(\infty)}$, deren erste das Bild der oberen ζ -Ebene ist, deren zweite das Bild der unteren ζ -Halbebene ist. Die Fläche $F^{(\infty)}$ ist unendlich-vielfach zusammenhängend.

Eine weitere, der Auffassung der Größe ζ als Funktion $\zeta(z)$ Rechnung tragende Charakterisierung, die zugleich die Idee des Iterationsverfahrens vorbereitet, ergibt sich, wenn wir uns die schlichte z -Ebene F sich längs der in den früheren Figg. 7a, 7b, 7c punktierten bzw. gestrichelten Linien aufgeschnitten denken, die wir als Linien λ bezeichnen. Diese Linien λ , in der Zahl $p+1$, sind teils solche, die benachbarte reelle Verzweigungspunkte, teils solche, die konjugierte Verzweigungspunkte miteinander verbinden; im Falle der Fig. 7a denken wir uns dabei die gestrichelten Linien symmetrisch nach unten vervollständigt. Die so aufgeschnittene schlichte Ebene werde mit F_0 bezeichnet. Die Funktion $\zeta(z)$ stellt eine eindeutige Abbildung der Fläche F_0 auf einen schlichten symmetrischen Bereich Φ_0 , wobei die Linien λ durch geschlossene Linien ersetzt erscheinen, deren jede in zwei durch eine elliptische Substitution der Periode 2 aufeinander bezogene Hälften zerfällt. Die schematische

Fig. 12 zeigt den Bereich Φ_0 , entsprechend dem allgemeinen Falle des Fig. 9. Man bemerkt sofort, daß die Größe $\zeta(z)$ bis auf eine reelle lineare Substitution durch diese Abbildungseigenschaft definiert werden kann. Diejenigen Linien λ , die in Fig. 9 auf der Achse des Reellen liegen, werden im Bilde ohne weiteres als Kreise erscheinen müssen, weil die beiden Hälften der einzelnen solchen Bildkurve aus Symmetriegründen zueinander symmetrisch sein müssen und weil je zwei symmetrische Punkte durch die zugehörige elliptische Substitution der Periode 2 ineinander übergehen müssen. Daß diese Abbildung eindeutig bestimmt ist, ergibt sich schon aus den vorangegangenen Überlegungen, wenn man bemerkt, daß die eine solche Abbildung leistende Funktion $\zeta(z)$ bei ihrer analytischen Fortsetzung, die wegen der Linearität der Substitutionen unmittelbar gegeben ist, sich tatsächlich als eine Größe erweist, die alle für die Größe $\zeta(z)$ bei der früheren Definition geforderten Eigenschaften hat. Es folgt dies aber auch unmittelbar daraus, daß bei Annahme zweier solcher Abbildungsfunktionen $\zeta(z)$ und $\zeta^{(1)}(z)$ sich eine Abbildungsbeziehung der ζ -Ebene auf die $\zeta^{(1)}$ -Ebene ergeben würde, bei der die obere ζ -Halbebene eindeutig der oberen oder unteren $\zeta^{(1)}$ -Halbebene entsprechen müßte. Bei Anwendung der durch die erzeugenden Randsubstitutionen des Bereichs Φ_0 bzw. $\Phi_0^{(1)}$ definierten Gruppe G bzw. $G^{(1)}$ würden sich nämlich unendlich viele Bildbereiche schlicht nebeneinander lagern, für die sich mittels des Verzerrungssatzes für lineare Funktionen (Math. Ann. 69, S. 26) unter Benutzung reeller Hilfsintervalle, auf analoge Weise wie oben in § 8 (Ende) unter allgemeineren Bedingungen, der Satz erweisen ließe, daß die Summe der Umfänge aller so entstehenden Parzellierungslinien konvergiert.

Die im vorstehenden dargelegte Auffassung zeigt unmittelbar, daß die Riemannsche Fläche $F^{(\infty)}$ aus lauter koinzidierend übereinanderliegenden zu denkenden Exemplaren F_0 aufgebaut werden kann und zwar nach folgender Regel: An jeden Begrenzungsschlitz von $F_0 \equiv F^{(0)}$ wird je ein Neuexemplar F_0 angesetzt mittels Überkreuzverheftung; darauf an jeden Begrenzungsschlitz der nunmehr entstandenen Fläche $F^{(1)}$ wieder je ein Exemplar F_0 usw. in infinitum. Die so konstruierte unendlich-vielblättrige Riemannsche Fläche $F^{(\infty)}$ ist offenbar schlichtartig, unendlich-vielfach zusammenhängend und wird, wenn man auf ihr in allen Blättern die Realitätszüge einzeichnet, in zwei zueinander symmetrische einfach zusammenhängende Hälften zerlegt. Insbesondere letzteres ergibt sich daraus, daß der Konstruktionsprozeß tatsächlich den Nebenlagerungsprozeß in der ζ -Ebene getreu widerspiegelt. Aber auch unmittelbar ist dieser Sachverhalt einzusehen, indem man ihn sich von Stufe zu Stufe des Konstruktionsprozesses klarmachen kann. Jede der Näherungsflächen zerfällt

nlich durch die Einzeichnung der Realitätszüge ebenfalls in zwei zueinander symmetrische einfach zusammenhängende Hälften.

Die vorstehenden Bemerkungen lassen erkennen, daß die soeben konstruierte unendlich-vielblättrige Fläche mit der früher auf andere Weise, nämlich durch Bildung ihrer einfach zusammenhängenden Hälften dargestellten Fläche $F^{(\infty)} \equiv F^{(\infty)}$ identisch ist.

Vierter Teil.

Uniformisierung reeller hyperelliptischer Kurven (zweiter Abschnitt):

Das Iterationsverfahren.

§ 12. Das darzulegende *Iterationsverfahren* wollen wir nun zunächst topologischer Beziehung erörtern. Dies soll bedeuten die Konstruktion der Fläche $F^{(\infty)}$ als Grenze von lauter geschlossenen einfach zusammenhängenden Riemannschen Flächen $F^{(n)}$, deren jede folgende relativ zur vorhergehenden zweiblättrig ist, indem sie zwei relative Verzweigungspunkte erster Ordnung hat. Wir können die Prozedur der Bildung der Verlagerungsfläche als *topologisches Iterationsverfahren* bezeichnen, in Übertragung auf dasselbe getreu widerlegenden hernach darzulegenden *funktionentheoretischen, d. h. rechnerischen Iterationsverfahren*, das wir als *Iterationsverfahren schlechthin* bezeichnen.

Den Ausgangspunkt des topologischen Iterationsverfahrens bildet die schlichte Ebene F , auf der wir uns abgesehen von den Verzweigungspunkten nur noch die gestrichelt bzw. punktiert gezeichneten Linien als

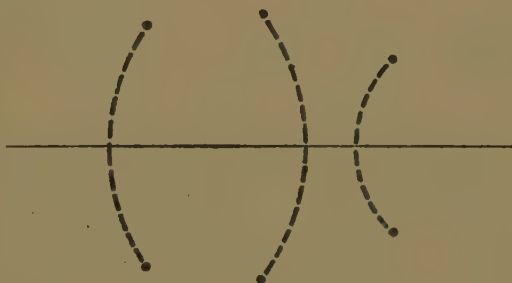


Fig. 8a.



Fig. 8b.



Fig. 8c.

Linien λ markiert denken, im Falle der Fig. 7a spiegelbildlich symmetrisch nach unten vervollständigt. Das gibt die Ausgangsfiguren $F^{(0)}$ die wir den einzelnen Fällen entsprechend in den beigefügten Figg. darstellen. Die Anzahl der voneinander verschiedenen Linien λ ist in allen Fällen gleich $p+1$. Wir bezeichnen diese Linien mit $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1}$ in irgendeiner Reihenfolge. Von der Fläche $F^{(0)}$ gehen wir zur Fläche $F^{(1)}$ über, indem wir irgendeine der Linien λ herausgreifen, die bisher geschlossenere Fläche $F^{(0)}$ längs dieser Linie aufschneiden, wodurch sie in eine Fläche $F^{(0)'}$ übergeht, und nunmehr ein zweites koinzidierendes Exemplar $F^{(0)}$ mit dem Grundexemplar längs der ausgezeichneten Linie λ über Kreuz verheften. Dadurch entsteht eine neue geschlossene Fläche vom Geschlecht 0 mit zwei Windungspunkten erster Ordnung in den Endpunkten jener Linie λ , eben die Fläche $F^{(1)}$. Auf $F^{(1)}$ denken wir uns jetzt ein neues Blatt, die p übrigen Linien λ eingezeichnet, indem wir sie fortlaufend numerieren: $\lambda_{p+2}, \dots, \lambda_{2p+1}$.

Die Linie λ , längs welcher die Verheftung stattfand, gibt jetzt auf $F^{(1)}$ eine geschlossene, durch die beiden Windungspunkte dieser Fläche hindurchgehende Linie. Wir bezeichnen sie als eine aufgelöste Linie λ im Gegensatz zu den auf $F^{(1)}$ markierten $2p$ intakten oder unaufgelösten Linien λ . Die Fläche $F^{(0)}$ ist nicht ein Teil der Fläche $F^{(1)}$, wohl aber ist $F^{(0)'}$ ein Teil der Fläche $F^{(1)}$.

Um den Übergang von $F^{(1)}$ zu $F^{(2)}$ zu machen, wird irgendeine der von $F^{(1)}$ getragenen unberührten Linien λ etwa λ_* herausgegriffen, die Fläche $F^{(1)}$ längs derselben aufgeschnitten, darauf ein identisches Exemplar der so gewonnenen Fläche $F^{(1)'}$ koinzidierend darüber gelegt und dasselbe mit ersterem längs der Linie λ_* über Kreuz verheftet. Die Fläche $F^{(1)}$ ist dann nicht Teil der Fläche $F^{(2)}$; wohl aber ist $F^{(1)'}$ ein Teil der Fläche $F^{(2)}$. Auf $F^{(2)}$ werden jetzt im zweiten benützten Exemplar $F^{(1)}$ alle auf dem ersten Exemplar markierten Linien λ unter Fortsetzung der begonnenen Numerierung eingetragen, wobei insbesondere λ_* als geschlossene Linie (aufgelöste Linie λ) wiedererscheint. Die Fläche $F^{(1)}$ ist damit Trägerin von $2(2p-1)$ intakten und drei aufgelösten Linien λ geworden. Eine der intakten wird jetzt zwecks Übergang zur Fläche $F^{(3)}$ herausgegriffen, längs ihr die Fläche $F^{(2)}$ aufgeschnitten und dadurch in eine Fläche $F^{(2)'}$ verwandelt usw.

Man übersieht den Fortgang des Verfahrens. Bei der Fortsetzung in infinitum hat man nur bezüglich der Auswahl der jeweils als Verzweigungsschnitt zu benützenden intakten Linie λ darauf zu achten, daß alle überhaupt im Laufe des Verfahrens sich einstellenden Linien λ einmal zur Benutzung, mithin zur Auflösung gelangen. Da die Linien λ durch ihr

rtlaufende Numerierung gekennzeichnet sind, ist diese Vorschrift leicht befolgen. Sämtliche Flächen $\bar{F}^{(n)}$ sind geschlossene einfach zusammenhängende Flächen.

Indem wir die Definitionsgleichung:

$$\bar{F}^{(\infty)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{F}^{(n)}$$

zur Definition der Fläche $\bar{F}^{(\infty)}$ anschreiben, meinen wir damit nicht, daß die der Näherungsflächen $\bar{F}^{(n)}$ als Teil in allen folgenden enthalten ist, sondern vielmehr dieses, daß jeder die auf $\bar{F}^{(n)}$ markierten intakten Linien λ ausschließende Teil von $\bar{F}^{(n)}$ als Teil auch in allen späteren Flächen $\bar{F}^{(n+1)}$, $\bar{F}^{(n+2)}$, ... enthalten ist. Stellen wir uns die Flächen $\bar{F}^{(n)}$ durch eine von ihr getragenen intakten Linien λ begrenzt vor, so entsteht eine Fläche $\bar{F}^{(n)''}$, deren Zusammenhang gleich der Anzahl dieser Linien λ ist. Diese Fläche $\bar{F}^{(n)''}$ ist dann ein Teil aller Flächen $\bar{F}^{(v)''}$ von höherem Index; und man hat die Beziehungen

$$\bar{F}^{(0)''} < \bar{F}^{(1)''} < \bar{F}^{(2)''} < \dots,$$

$$\bar{F}^{(\infty)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{F}^{(n)''}.$$

Da die Anzahl der von $\bar{F}^{(n)}$ getragenen intakten Linien λ zugleich mit dem Index n offenbar unendlich groß wird, ergibt sich, wegen der Überbestimmung dieser Zahl mit dem Zusammenhang der Fläche $\bar{F}^{(n)''}$, ein unendlich hoher Zusammenhang für die Fläche $\bar{F}^{(\infty)}$, obwohl sie als Grenze geschlossener einfach zusammenhängender Flächen konstruiert wurde. Die Formel (*) gegebene Auffassung der Fläche $\bar{F}^{(\infty)}$ zeigt uns, daß wir es hier in der Tat mit derselben Fläche zu tun haben, die wir früher als die zur Funktion $\zeta(z)$ gehörende Riemannsche Fläche erkannten und demgemäß (§ 11) aus lauter Exemplaren $\bar{F}_{(0)}$ aufbauten. In der Tat wird ja jede der immer schlichtartigen Flächen $\bar{F}^{(n)''}$ von einem Aggregat solcher Flächen $\bar{F}_{(0)}$ gebildet. Das Ziel, die Riemannsche Fläche der Funktion $\zeta(z)$ durch topologische Iteration zu konstruieren, ist somit erreicht.

§ 13. Nach diesen topologischen Erörterungen gehen wir zur Darstellung des *rechnerischen Iterationsverfahrens* über. Das Grundprinzip dieses Verfahrens ist jetzt leicht zu sagen. Die Flächen $\bar{F}^{(n)}$ werden der Reihe nach auf die schlichte Vollebene abgebildet durch algebraische Funktionen $\varphi_n(z)$, die durch sukzessive Quadratwurzeloperationen gebildet werden. Die Abbildung wird in der Weise normiert, daß man etwa vor schreibt, der unendlich ferne Punkt von $\bar{F}^{(0)}$ soll in den unendlich fernen Punkt übergehen, so, daß $\varphi_n(z)$ für die Umgebung von z in der Form

$$\varphi_n(z) = z + ((0))$$

entwickelt werden kann.

Es kann nur eine solche Abbildungsfunktion geben. Aus der Symmetrie, wie auch aus dem sogleich anzugebenden Quadratwurzelverfahren ergibt sich, daß diese Funktion in allen über den Realitätszügen liegenden Punkten der Fläche $F^{(n)}$, überhaupt auf der ganzen Symmetrielinie der Fläche $F^{(n)}$, reell ist. Die Fläche $F^{(n)}$ besitzt eine sie in zwei einfach zusammenhängende Hälften teilende geschlossene Symmetrielinie. Diese wird von den über den Realitätszügen gelegenen Linienteilen der Flächen unter Hinzunahme aller auf $F^{(n)}$ vorhandenen über der Achse des Reellen liegenden intakten Linien λ gebildet. Die Funktionenfolge erweist sich als konvergent, und die Grenzfunktion

$$\varphi_{\infty}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(z)$$

leistet die gewünschte Abbildung der Grenzfläche $F^{(\infty)}$ auf die in unendlich vielen diskreten Punkten der Achse des Reellen punktierte schlichte Ebene, wobei die eine Hälfte der Fläche $F^{(\infty)}$ in die obere, die andere in die untere Halbebene übergeht.

Das Iterationsverfahren, wie wir es nunmehr vorführen werden, ist, wie bemerkt werden mag, auch aus sich heraus verständlich, ohne Bezugnahme auf das soeben entwickelte topologische Iterationsverfahren, welches indes geeignet ist, den Sinn des rechnerischen Iterationsverfahrens zu erweitern und zu vertiefen durch die Klarlegung des Zusammenhanges mit der Methode der Überlagerungsfläche, die hier in einer besonderen Aus-

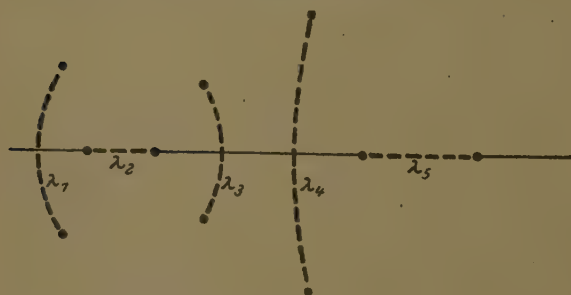


Fig. 9.

prägung zur Anwendung gelangt. Die beigegefügte Fig. 9 zeigt den abzubildenden, allgemein gewählten Bereich F_0 . Die in der Figur punktierten Linien λ , in der Zahl $p + 1$, sind in irgendeiner Reihenfolge numeriert. Wir greifen eine der Linien λ heraus

und bilden die durch ihre Endpunkte als Windungspunkte erster Ordnung bestimmte zweiblättrige Riemannsche Fläche mit λ als Verzweigungsschnitt und $F_0 \equiv F^{(0)}$ als Grundblatt auf einen schlichten Bereich ab so, daß die Achse des Reellen unter Festhaltung des unendlich fernen Punktes in sich übergeht. Die Abbildungsfunktion

$$\varphi_1(z) = \zeta^{(1)}$$

wird im Grundblatte $F^{(0)}$ der Normierungsbedingung

$$\varphi_1(z) = z + ((0))$$

terworfen. Ihr Ausdruck steht in einem einfachen Zusammenhange mit dem Ausdrucke der Umkehrungsfunktion von $Z + \frac{1}{Z} = z$, die das Ge-
 nschte für eine die Punkte -2 und $+2$ über 0 verbindende Linie λ
 sten würde. Nach Ausführung der Abbildungsoperation ist $F^{(0)}$ in einen
 reich $F_0^{(1)}$ übergegangen, an den sich jetzt längs der transformierten,
 mehr aufgelösten Linie λ ein mit ihm durch eine elliptische lineare
 ansformation der Periode 2 äquivalenter Bereich lagert, der seinerseits
 äger von p weiteren Linien λ wird, die durch die erwähnte elliptische
 bstitution aus den p in $F_0^{(1)}$ als Bilder der intakt gelassenen Original-
 lien λ zu markierenden Linien λ hervorgehen. Es ist ersichtlich, daß
 ese neuen Linien λ

entsprechend ihren Ori-
 ginalen entweder wieder
 f der Achse des Reellen
 gen oder durch sie in
 ei symmetrische Hälft-
 n zerlegt werden. Die
 i Bildung der Abbil-
 ngsfunktion benutzte
 nie λ erscheint in der
 ldfigur $F_0^{(1)}$ als eine
 urch die elliptische
 bstitution auf sich
 bst bezogene ge-
 lossene Linie (*aufge-
 te Linie λ*); vgl. die
 gg. 10a, 10b, in der
 mal λ_2 , das andere
 al λ_3 als *Transforma-*

*tion*slinie gewählt ist. In den Figuren ist die fortlaufende Numerierung der
 Linien λ so getroffen, daß für die neu zu numerierenden Linien λ die
 Reihenfolge ihrer Numerierung entsprechend der Reihenfolge der Original-
 lien gewählt ist.

Die mit den Linien λ , wie angegeben, ausgestattete $\zeta^{(1)}$ -Ebene bildet
 die Figur $\Phi^{(1)}$. Diese ist das eineindeutige konforme Abbild der früher
 mit $F^{(1)}$, vorhin mit $F_0^{(1)}$ bezeichneten zweiblättrigen Riemannschen
 Fläche. Es wird nunmehr eine beliebige der intakten Linien λ der Figur $\Phi^{(1)}$
 als Transformationslinie herausgegriffen. Durch die so bestimmte Wurzel-
 transformation gelangen wir zu einem Bereiche Φ_2 , das eineindeutige Ab-
 bild der vierblättrigen Fläche $F^{(2)}$. Sie enthält als Teil einen Be-

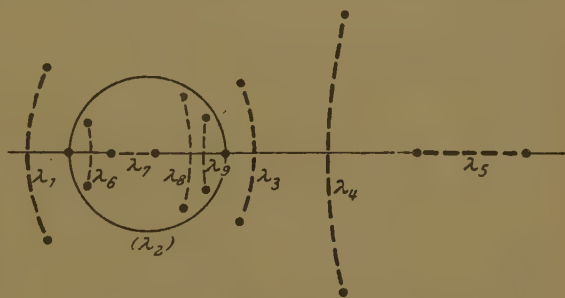


Fig. 10a.

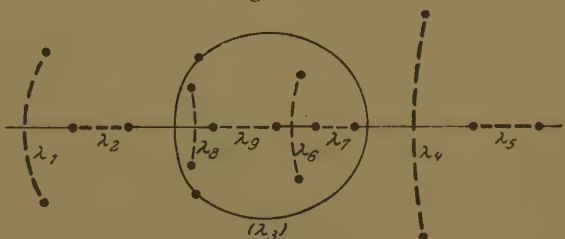


Fig. 10b.

reich $\Phi_0^{(2)}$, der den unendlich fernen Punkt in seinem Innern enthält und das durch den normierten Hauptzweig der Funktion $\varphi_2(z)$ entworfenen Bild darstellt.

Das Verfahren wird in inf. fortgesetzt, wobei nur darauf zu achten ist, daß die fortlaufend zu numerierenden Linien λ , deren Anzahl mit wachsendem Index n offenbar über alle Grenzen wächst, jede einmal als Transformationslinie zur Verwendung gelangt und dadurch zu einer aufgelösten Linie λ wird. Entsprechend dem Umstande, daß die Blätterzahl der früher konstruierten Fläche $F^{(n)}$ gleich 2^n ist, haben wir hier eine Zerlegung des Bereichs $\Phi^{(n)}$ in 2^n Parzellen vom Zusammenhang $p+1$, wenn als Parzellierungslinien alle Linien λ (aufgelöste und unaufgelöste) der $\zeta^{(n)}$ -Ebene dienen. Die den unendlich fernen Punkt enthaltende Parzelle werde mit $\Phi_0^{(n)}$ bezeichnet. Sie ist das Bild des Bereiches $F^{(0)}$ der z -Ebene, vermöge der durch $\varphi_n(z)$ geleisteten Abbildung der Fläche $F^{(n)}$ auf $\Phi^{(n)}$.

§ 14. Die aufgelösten Linien λ verdienen im Hinblick auf den zu führenden Konvergenzbeweis besondere Aufmerksamkeit. Unter Bezugnahme auf diese Linien ordnen wir jetzt jedem Bereiche $\Phi^{(n)}$ einen Stufenindex μ_n zu, der immer kleiner als n ist. Wir verstehen unter μ_n die Mindestzahl aufgelöster Linien λ , die man in der $\zeta^{(n)}$ -Ebene vom Bereiche $\Phi_0^{(n)}$ aus durchschreiten muß, um zu einer unaufgelösten Linie λ zu gelangen. Danach wäre z. B. $\mu_1 = 0$. Offenbar bestehen die Beziehungen

$$\mu_{n+1} \geq \mu_n, \quad \lim_{n=\infty} \mu_n = \infty.$$

Insbesondere die letzte Beziehung ist eine Folge der oben eingeführten als Richtschnur für das Iterationsverfahren dienenden Bedingung, daß jede während des Verfahrens hinkommende Linie λ einmal als Transformationslinie benutzt werden soll und dadurch aufgelöst wird.

Wir definieren als Bereich $\Phi_\nu^{(n)}$ ($\nu \leq \mu_n$) denjenigen Bereich, den man in der $\zeta^{(n)}$ -Ebene, ausgehend vom Bereiche $\Phi_0^{(n)}$, erhält, wenn man all diejenigen $(p+1)$ -fach zusammenhängenden Parzellen hinzunimmt, zu denen man durch Überschreitung von höchstens ν aufgelösten Linien gelangt. Der Bereich $\Phi_\nu^{(n)}$ hat den Zusammenhang $(p+1) \cdot p^\nu$. Die Anzahl seiner Parzellen ist

$$1 + (p+1) + (p+1)p + (p+1)p^2 + \dots + (p+1)p^{\nu-1};$$

es treten nämlich zur Grundparzelle $\Phi_0^{(n)}$ nacheinander zunächst $p+1$ Parzellen erster Stufe, $(p+1)p$ Parzellen zweiter Stufe, ..., $(p+1)p^{\nu-1}$ Parzellen ν -ter Stufe hinzu.

Wir wollen nun nachweisen, daß die Summe der Umfänge $S_\nu^{(n)}$ der Begrenzungslinien des Bereichs $\Phi_\nu^{(n)}$ eine Größe darstellt, die $< G \cdot q^\nu$ g

gesetzt werden kann, wobei G und q von n und r unabhängig bestimmt werden können, und zwar $q < 1$:

$$S_r^{(n)} < G \cdot q^r.$$

Die Grundlage für diesen Nachweis bietet unser Verzerrungssatz; vgl. Abh. V, § 4.

Wir bemerken zunächst, daß die Begrenzungslinien der Bereiche $\Phi_0^{(n)}$ sämtlich in einen von n unabhängig bestimmbar endlichen Bezirke gelegen sind. Dies ist nämlich eine Folge des Verzerrungssatzes für schlichte unendliche Bereiche (Verzerrungssatz III, l. c.), angewandt auf die Funktion $\varphi_n(z) = \zeta^{(n)}$, für die

$$\left(\frac{d\zeta^{(n)}}{dz} \right)_{z=z} = 1$$

ist. Wir können sagen, daß es eine von n unabhängige Konstante R gibt so, daß jene Linien sämtlich in dem Kreise

$$|\zeta^{(n)}| < R$$

enthalten sind. Wir definieren nun die Indexfolge

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

gemäß der Bestimmung, daß der Bereich $\Phi^{(n_1)}$ der erste in der Folge aller Bereiche $\Phi^{(n)}$ sein soll, für welchen $\mu_n \geq \kappa$ ist. Wir sprechen ferner von aufgelösten Linien λ der Grundstufe, ersten, zweiten, dritten, ..., μ_n -ten Stufe in $\Phi^{(n)}$, und meinen damit die inneren Begrenzungslinien der Parzellen r -ter Stufe des Bereichs $\Phi^{(n)}$.

Es sei $S_0^{(n_1)}$ die Gesamtlänge der Linien λ nullter Stufe des Bereichs $\Phi^{(n_1)}$, d. i. der Begrenzungslinien von $\Phi_0^{(n_1)}$. Infolge des Verzerrungssatzes II (für mehrfach zusammenhängende Bereiche) in Verbindung mit III (für unendliche Bereiche) gibt es eine Konstante Q , so, daß die Gesamtlänge $S_0^{(n)}$ der Linien λ nullter Stufe für irgendeinen Bereich $\Phi^{(n)}$ ($n > n_1$) kleiner als $Q S_0^{(n_1)}$ gesetzt werden kann:

$$S_0^{(n)} < Q S_0^{(n_1)} \quad (n > n_1).$$

Der Verzerrungssatz (II, III) liefert nämlich eine Beschränkung

$$\left| \frac{d\zeta^{(n)}}{d\zeta^{(n_1)}} \right| < Q,$$

gültig bei Beschränkung der Variabilität von $\zeta^{(n_1)}$ auf die Begrenzungslinien von $\Phi_0^{(n_1)}$, wobei es auch zulässig ist, einen einbettenden Streifen (*Begleitstreifen*) für jede dieser Linien als Variabilitätsbereich der Größe $\zeta^{(n_1)}$ zuzulassen.

Ist $D_0^{(n)}$ die Summe der auf der Achse des Reellen gelegenen Durch-

messer der genannten Begrenzungslinien von $\Phi_0^{(n)}$, so hat man offenbar die Beziehungen:

$$D_0^{(n)} < \frac{S_0^{(n)}}{2} < \frac{Q}{2} S_0^{(n)}.$$

Die erwähnten Begleitstreifen der Begrenzungslinien des Bereichs $\Phi_0^{(n)}$ schneiden die Achse des Reellen längs je zweier Intervalle (*Begleitintervalle*). Alle in dem Bereich $\Phi_{\mu_n}^{(n)}$ vorkommenden aufgelösten Linien λ denken wir uns ihrer Provenienz entsprechend mit Begleitstreifen und Begleitintervallen versehen, die als die konformen Bilder der ihnen entsprechenden Originalstreifen bzw. Originalintervalle in $\Phi^{(n)}$ zu wählen sind. Eine Kollision der so in $\Phi^{(n)}$ konstruierten Begleitstreifen findet nicht statt, wenn die Originalbegleitstreifen in $\Phi^{(n)}$ von vornherein schmal genug gewählt sind.

Nun betrachten wir irgendeine Parzelle des Bereichs $\Phi_{\mu_n}^{(n)}$ näher. Diese wird von einer Linie λ_* umschlossen und von p Linien λ im Innern begrenzt. Wir wollen dartun, daß es eine vom Index n und von der Wahl der Parzelle unabhängige GröÙe $q < 1$ gibt, so daß die Summe der reellen Durchmesser der genannten inneren Linien kleiner als q mal der reellen Durchmesser D_λ von λ_* ist:

$$d_\lambda < q D_\lambda, \quad (q < 1).$$

Zu dem Zwecke führen wir die in Fig. 11 kenntlich gemachten Bezeichnungen für die vier Teilintervalle der beiden Begleitintervalle der Linie λ_* ein. Wir bezeichnen ferner

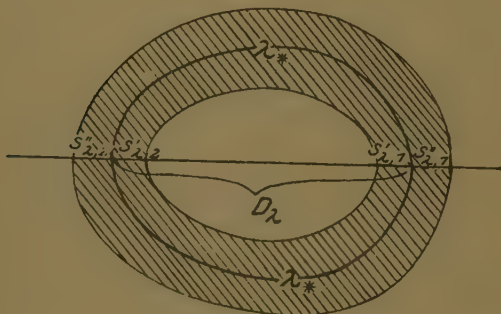


Fig. 11.

mit $s_{\max}$ und $s_{\min}$ die Längen des kleinsten bzw. größten von den $4(p+1)$ Begleitintervallen der $p+1$ Begrenzungslinien des Bereichs $\Phi_{(0)}^{(n)}$, ferner mit $S_{\max}$ und $S_{\min}$ den Umfang der längsten bzw. kürzesten Begrenzungslinie von $\Phi_{(0)}^{(n)}$. Nach dem Verzerrungssatze gibt es, wenn ζ_λ im Begleitstreifen von λ

variierend vorgestellt wird, $\zeta_{(1)}$ im entsprechenden Originalbegleitstreifen eine von der Wahl von λ_* unabhängige GröÙe $Q_1 > 1$, so daß man hat

$$\text{Max} \left| \frac{d\zeta_\lambda}{d\zeta_{(1)}} \right| : \text{Min} \left| \frac{d\zeta_\lambda}{d\zeta_{(1)}} \right| < Q_1.$$

Es ist dann

$$d_\lambda < D_\lambda - (s'_{\lambda,1} + s'_{\lambda,2}),$$

$$\frac{d_\lambda}{D_\lambda} < 1 - \frac{s'_{\lambda,1} + s'_{\lambda,2}}{D_\lambda},$$

$$\frac{s'_{\lambda,1} + s'_{\lambda,2}}{D_\lambda} > \frac{s'_{\lambda,1} + s'_{\lambda,2}}{S_\lambda} > \frac{2 s_{\min} \min \left| \frac{d\zeta_\lambda}{d\zeta_{(1)}} \right|}{S_{\max} \max \left| \frac{d\zeta_\lambda}{d\zeta_{(1)}} \right|},$$

$$\frac{s'_{\lambda,1} + s'_{\lambda,2}}{D_\lambda} > \frac{2 s_{\min}}{S_{\max} \cdot Q_1};$$

also

$$\frac{d_\lambda}{D_\lambda} < 1 - \frac{2 s_{\min}}{S_{\max} \cdot Q_1} \equiv q.$$

Wir bezeichnen mit $D_\nu^{(n)}$ die Summe der Längen der reellen Durchmesser aller Linien λ der ν -ten Stufe ($\nu \leq \mu_n$) im Bereiche $\Phi^{(n)}$, d. i. aller Begrenzungslinien des Bereichs $\Phi_\nu^{(n)}$. Dann ergeben sich nunmehr die Beziehungen

$$\begin{aligned} D_1^{(n)} &< q D_0^{(n)}, \\ D_2^{(n)} &< q D_1^{(n)}, \\ &\dots\dots\dots, \\ D_\nu^{(n)} &< q D_{\nu-1}^{(n)}, \\ D_\nu^{(n)} &< q^\nu D_0^{(n)}, \\ D_\nu^{(n)} &< \frac{Q}{2} q^\nu S_0^{(n)}. \end{aligned}$$

mithin

Mit $s_\nu^{(n)'}$ werde die Summe der Längen der nach dem Innern zugewandten Begleitintervalle der Linien ν -ter Stufe von $\Phi_\nu^{(n)}$ bezeichnet. Dann ist

$$s_\nu^{(n)'} < D_\nu^{(n)}.$$

Mit $S_\nu^{(n)}$ werde die Summe der Umfänge aller dieser Linien λ bezeichnet. Dann besteht

$$S_\nu^{(n)} < s_\nu^{(n)'} \frac{S_{\max}}{2 s_{\min}} Q_1,$$

da für die einzelne Linie λ

$$\frac{S_\lambda}{s'_{\lambda,1} + s'_{\lambda,2}} < \frac{S_{\max}}{2 s_{\min}} Q_1,$$

$$S_\lambda < (s'_{\lambda,1} + s'_{\lambda,2}) \frac{S_{\max}}{2 s_{\min}} Q_1$$

gilt. Als Endresultat findet sich somit

$$S_\nu^{(n)} < \frac{S_{\max}}{2 s_{\min}} Q_1 \frac{Q}{2} q^\nu S_0^{(n)} = G q^\nu,$$

wobei

$$q = 1 - \frac{2s_{\min}}{s_{\max} Q_1} < 1.$$

§ 15. Nunmehr bietet die den Konvergenzbeweis vollendende Abschätzung der Differenz

$$\varphi_{n+m}(z) - \varphi_n(z)$$

keine Schwierigkeiten mehr dar. Diese Funktion verschwindet im Unendlichen. Schreiben wir sie in der Form

$$\zeta^{(n+m)} - \zeta^{(n)},$$

so bemerken wir, daß ihr Existenzbereich, bei Auffassung von $\zeta^{(n)}$ als der unabhängigen Variablen, auf das ganze Gebiet $\Phi_v^{(n)}$ ausgedehnt werden kann, sofern nur $n \geq n_v$ gewählt wird (siehe die in § 14 gegebene Definition von n_v). Den einzelnen Begrenzungslinien von $\Phi_v^{(n)}$ entsprechend haben wir aber eine Variabilität der Größe $\zeta^{(n)}$ wie auch der Größe $\zeta^{(n+m)}$, deren Schwankungssumme kleiner als $\frac{S_v^{(n)}}{2}$ bzw. $\frac{S_v^{(n+m)}}{2}$ ist; daher die Beziehung

$$|\zeta^{(n+m)} - \zeta^{(n)}| < (S_v^{(n)} + S_v^{(n+m)}) < 2Gq^r$$

im ganzen Bereiche $B_v^{(n)}$ gilt wegen des Satzes, daß die Schwankung einer in einem mehrfach zusammenhängenden Bereich eindeutig erklärten analytischen Funktion kleiner als die Summe der Schwankungen auf den einzelnen Randlinien ist, unter Berücksichtigung des Verschwindens der abzuschätzenden Differenz im Unendlichen.

Um nun die Relation

$$|\zeta^{(n+m)} - \zeta^{(n)}| < \varepsilon$$

für ein beliebig klein vorgegebenes ε zu befriedigen, haben wir n bei freibleibendem m folgenden Bedingungen gemäß zu wählen:

$$2Gq^r < \varepsilon \quad (\text{zur Bestimmung von } r),$$

$$n > n_v \quad (\text{zur Bestimmung von } n).$$

Die Grenzfunktion heiße $\zeta(z)$. Sie leistet die gewünschte Abbildung, nämlich die Abbildung der Fläche $F^{(\infty)}$ auf einen schlichten Bereich $\Phi^{(\infty)}$, der durch die Achse des Reellen in zwei symmetrische, einfach zusammenhängende Hälften zerlegt wird. Jede dieser beiden Hälften erfüllt eine Halbebene, weil offenbar auch für den Grenzbereich $\Phi^{(\infty)}$ die Beziehung

$$S_v^{(\infty)} < Gq^r$$

gilt, d. h.: der Bereich $\Phi_v^{(\infty)}$ wird von einer endlichen Anzahl Linien begrenzt, deren Gesamtlänge mit wachsendem Index v unendlich klein wird. Die einzelnen Begrenzungslinien von $\Phi_v^{(\infty)}$ erreichen mithin durch ihre

Punkte eine Maximalentfernung von der Achse des Reellen, die bei unbegrenzt wachsendem ν gleichmäßig unter jede Grenze herabsinkt.

Die Begrenzungslinien von $\Phi_0^{(\infty)}$ erscheinen nunmehr durch elliptische Substitutionen aufeinander bezogen. Denn die betreffenden analytischen Beziehungen lassen sich als eindeutige Abbildungen in der ganzen oberen bzw. unteren Halbebene erklären.

Die Gestalt des Bereichs $\Phi_0^{(\infty)}$ kann durchaus kreisförmig gewählt werden. Diejenigen Linien λ in der z -Ebene nämlich, die auf der Achse des Reellen verlaufen, werden sich entsprechend der symmetrischen Anlage des Iterationsverfahrens in der ζ -Ebene (Ebene des Bereichs $\Phi_0^{(\infty)}$) als geschlossenes, durch die Achse des Reellen in zwei zueinander symmetrische Hälften geteilte Linien darstellen, die durch eine elliptische Substitution der Periode 2 mit den erwähnten Teilpunkten als Fixpunkten aufeinander bezogen sind (Linien λ erster Art). Dies ist aber immer nur möglich, wenn jene Linien der ζ -Ebene Kreislinien sind. Die übrigen Begrenzungs-
linien λ des Bereichs $\Phi_0^{(\infty)}$ sind durch elliptische Substitutionen der Periode 2

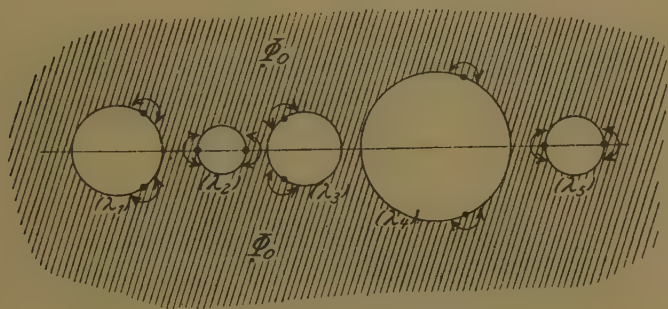


Fig. 12.

mit konjugiert imaginären Fixpunkten auf sich selbst bezogen, wobei die Fixpunkte wieder die Rolle von Teilpunkten übernehmen (Linien λ zweiter Art). Diese Fixpunkte müssen offenbar auf demjenigen Kreise liegen, der die Achse des Reellen in denselben Punkten wie die betreffende Linie λ schneidet. Diese Linien λ können folglich, im Sinne erlaubter Abänderung, durch die erwähnten Kreise ersetzt werden. Fig. 12 zeigt einen so gewonnenen Fundamentalbereich, der der Fig. 9 (§ 13) entspricht. Der in der angegebenen Weise normierte Fundamentalbereich werde mit Φ_0 bezeichnet. Die Linien λ in der z -Ebene denken wir uns entsprechend abgeändert, wovon nach dem Gesagten nur die Linien λ der zweiten Art betroffen werden; die Endpunkte und Schnittpunkte mit der Achse des Reellen bleiben dabei fest.

Die erzeugenden Substitutionen dieses Fundamentalbereichs liefern eine

Gruppe Γ , in bezug auf welche die Größe $z(\zeta)$ eindeutig und automorph ist. Die Größe w hingegen erfährt gegenüber jeder der erzeugenden Substitutionen eine Veränderung, nämlich Multiplikation ihres Wertes mit dem Faktor -1 . Im übrigen ist auch $w(\zeta)$ eine eindeutige Funktion der Veränderlichen ζ .

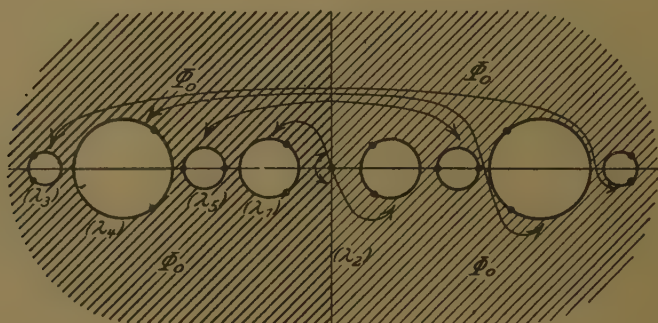


Fig. 13.

Der betrachtete Fundamentalbereich Φ_0 stellt sich als das Bild der z -Ebene dar, die wir mit F_0 bezeichneten. Seine Randsubstitutionen sind die Erzeugenden derjenigen

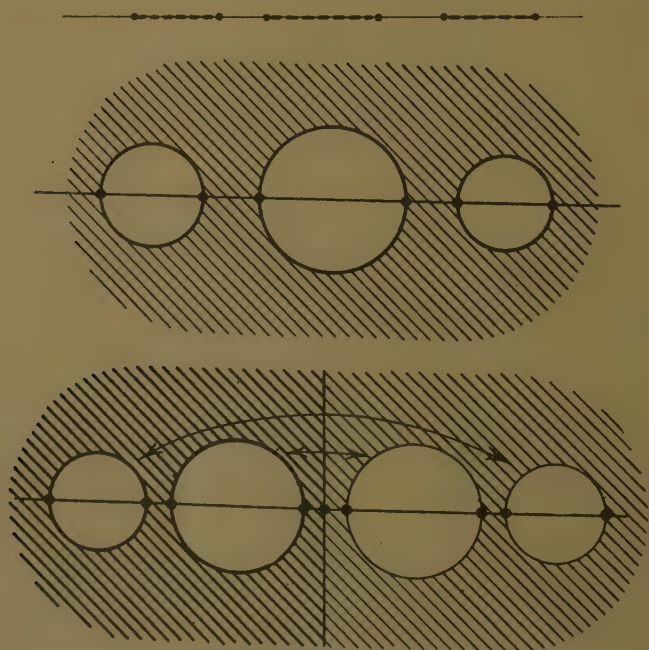


Fig. 14a, b, c.

nearen Substitutionsgruppe, durch die die Zweige der Funktion $\zeta(z)$ miteinander verknüpft sind. Um zu einem Fundamentalbereich Φ_0 der zu (z, w) gehörenden linearen Substitutionsgruppe Γ zu gelangen, brauchen wir nur irgendeine der Erzeugenden von Γ auf den Fundamentalbereich Φ_0 anzuwenden. Der so entstehende erweiterte Bereich ist ein Fundamental-

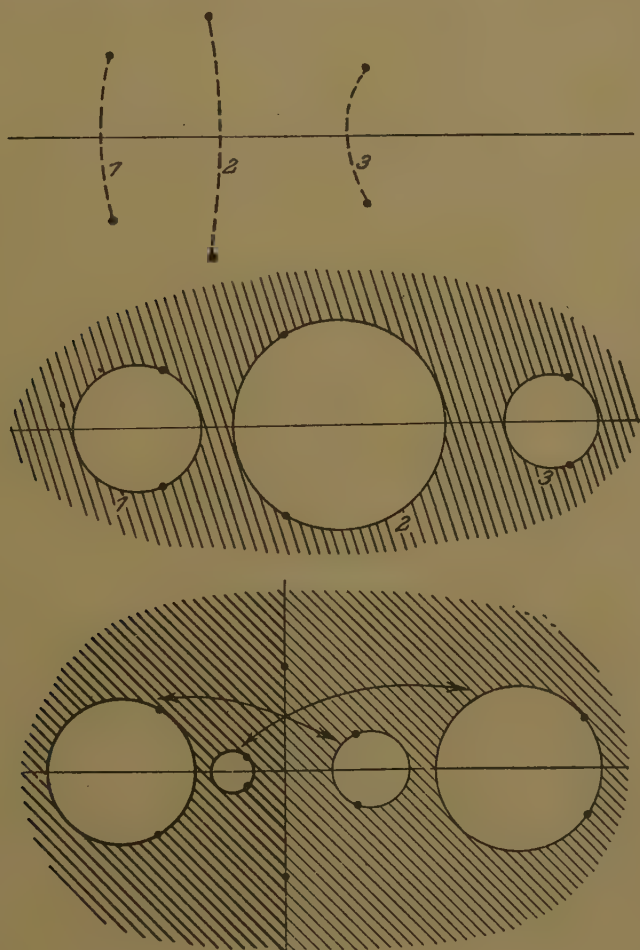


Fig. 15a, b, c.

bereich Φ_0 der Gruppe Γ . Diesem Übergang entspricht in der z -Ebene die Übereinanderheftung zweier Exemplare F_0 längs der durch die Wahl jener Erzeugenden ausgezeichneten Linie λ . Die dadurch entstehende Fläche F_0 entsteht aus der zweiblättrigen Riemannschen Fläche F der Funktion $w(z)$ durch Aufschneidung derselben längs den übrigen p Linien λ durch beide Blätter hindurch, eine Aufschneidung, die als eine solche längs

p getrennter Rückkehrschnitte der Fläche F betrachtet werden kann. Ist V_1 die ausgewählte erzeugende Substitution des Bereichs Φ_0 und sind $V_2, \dots, V_{p+1}$ die übrigen Erzeugenden desselben Fundamentalbereichs, so sind die Substitutionen

$$V_2 V_1, V_3 V_1, \dots, V_{p+1} V_1$$

die p Erzeugenden des Fundamentalbereichs Φ_0 . Diese Substitutionen ordnen die $2p$ Begrenzungskreise des Bereichs Φ_0 paarweise, und zwar immer mit Wechsel des Durchlaufungssinns, einander zu. Man bemerkt sofort, daß unter diesen p Erzeugenden des Bereichs Φ_0 sich dann und nur dann solche mit negativer Koeffizientendeterminante, d. i. solche, die eine Vertauschung der oberen und unteren Halbebene bewirken, befinden, wenn die zugrunde liegende Riemannsche Fläche F *diasymmetrisch* ist, d. h. wenn entweder keine oder sämtliche Linien λ der z -Ebene in der Achse des Reellen verlaufen oder, was dasselbe ist, wenn die Verzweigungsstellen a der Funktion $w(z)$ entweder sämtlich reell oder sämtlich imaginär sind. (Vgl. die Figg. 14, 15.)

Sind speziell die Fixpunkte der Erzeugenden $V_1, V_2, \dots, V_{p+1}$ sämtlich reell, so wird die erwähnte paarweise Zuordnung der $2p$ Begrenzungskreise des Bereichs Φ_0 einfach durch die Spiegelung an dem gewählten Hilfskreise λ bewirkt⁹⁾.

Fünfter Teil.

Abbildung beliebiger mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Kreisbereiche.

§ 16. Es sei nunmehr B ein beliebiger m -fach zusammenhängender schlichter Bereich ($m \geq 2$), dessen m Begrenzungslinien $L_1, \dots, L_m$ wir als geschlossene reguläre analytische Linien annehmen können. Der unendlich ferne Punkt der Bereichebene, $z = \infty$, werde als innerer Punkt des Bereichs angenommen. Die Abbildungsaufgabe, die wir uns stellen verlangt die Bestimmung einer Funktion $f(z)$, durch deren Vermittelung der Bereich B auf einen m -fach zusammenhängenden Kreisbereich B' abgebildet wird, der seinerseits als unbekannt anzusehen ist. Zur Normierung

⁹⁾ Im Hinblick auf die Schlußbemerkung der Einleitung heben wir hier noch hervor, daß in allen Fällen der Uniformisierung reeller hyperelliptischer Kurven die Umkehrungsfunktion $z(\zeta)$ durch die Reihe $z = \zeta + \sum (\zeta_n - \omega_n)$ dargestellt wird, wenn ζ_n und ω_n alle mit ζ bzw. ∞ vermöge der Gruppe Γ äquivalenten Werte durchläuft. Mit Hilfe dieser Reihe kann auch unmittelbar die Abbildung eines symmetrischen Kreisbereichs der ζ -Ebene auf einen Schlitzbereich geleistet werden. Die analytische Darstellung von $w(\zeta)$ gelingt mittels unendlicher Produkte.

der Abbildung wird ferner bestimmt, daß die Abbildungsfunktion im Unendlichen die Entwicklungsform

$$z' = f(z) = z + ((0))$$

haben soll.

Es ist nun zunächst der Unitätsbeweis zu führen, daß die Abbildungsfunktion, sofern eine solche überhaupt existiert, einzig in ihrer Art ist. Dazu wird angenommen, es gäbe noch eine zweite Abbildungsfunktion $z''(z)$, die eine Abbildung des Bereichs B auf einen Kreisbereich B'' leistet. Wir betrachten dann die Abhängigkeit $z''(z')$, die sich als eine eindeutige Abbildungsbeziehung des Innern von B' auf das Innere von B'' darstellt, wobei $z'' - z'$ im Unendlichen verschwindet.

Diese Abbildungsbeziehung läßt sich nun, da sie nach den Prinzipien der Ränderzuordnung auch auf den Begrenzungskreisen von B' und B'' regulär sein muß, über diese Begrenzungskreise hinaus gemäß dem Spiegelungsprinzip analytisch fortsetzen. Wir bemerken, daß wir beiderseits, d. h. in der z' - und z'' -Ebene, je unendlich viele Kreisbereiche durch fortgesetzte Spiegelung bekommen, von welchen je zwei korrespondierende durch die Funktion $z''(z')$ eindeutig aufeinander abgebildet werden. Wir bezeichnen mit $B'_{(\nu)}$ bzw. $B''_{(\nu)}$ denjenigen aus B' bzw. B'' entstehenden umfassenderen Bereich, der von allen denjenigen durch die Spiegelung gewonnenen Bildern des Originalbereichs B' bzw. B'' gebildet wird, zu denen man, ausgehend von den Ausgangsbereichen, durch Überschreitung von höchstens ν Linien K' bzw. K'' gelangt. Mit K' bzw. K'' bezeichnen wir dabei jede beliebige der durch den Spiegelungsprozeß aus den Begrenzungskreisen $K'_1, \dots, K'_m$ von B' bzw. den Begrenzungskreisen $K''_1, \dots, K''_m$ von B'' gewonnenen Linien. Mit $B'_{(\infty)}$ bzw. $B''_{(\infty)}$ mögen die unendlich vielfach zusammenhängenden Grenzbereiche

$$B'_{(\infty)} = \lim_{\nu=\infty} B'_{(\nu)}, \quad B''_{(\infty)} = \lim_{\nu=\infty} B''_{(\nu)}$$

bezeichnet werden.

Wir umgeben nunmehr jeden der m Begrenzungskreise von B' mit einem konzentrischen größeren Kreise, dessen Radius gleich $\frac{R}{q}$, ($q < 1$), ist, wenn R der Radius des betreffenden Begrenzungskreises ist. q ist dabei so nahe an 1 gewählt zu denken, daß die entstandenen, an die genannten Begrenzungskreise nach außen anschließenden ringförmigen Streifen des Bereichs B' sich gegenseitig nicht bedecken. Für jeden dieser Kreise ist q das Radienverhältnis. Bei dem Spiegelungsprozeß entsprechen den erwähnten Ringen unendlich viele zweifach zusammenhängende Kreisbereiche, die aber nicht mehr von konzentrischen Kreisen begrenzt sein werden. Nach einem oben (§ 4) erwähnten Hilfssatze ist für jeden dieser Ringe das Radienverhältnis kleiner als q .

Mit f'_ν werde der gesamte von den Begrenzungskreisen des Bereichs B'_ν umschlossene Flächeninhalt bezeichnet, insbesondere mit f'_0 der Inhalt des von B' in der Ebene freigelassenen, von m Kreisflächen gebildeten Gebiets. Man hat dann, wie die Betrachtung der Hilfsringe sofort lehrt, folgende Beziehungen:

$$f'_{\nu+1} < q^2 f'_\nu \quad [\nu = 0, 1, 2, \dots],$$

also

$$f'_\nu < q^{2\nu} f'_0,$$

$$\lim_{\nu=\infty} f'_\nu = 0.$$

Ebenso für B''

$$\lim_{\nu=\infty} f''_\nu = 0.$$

Die Funktion

$$\psi(z') = z'' - z'$$

ist eine im ganzen Bereiche B' reguläre analytische Funktion, die im Unendlichen verschwindet, außerdem offenbar im ganzen Bereiche B' beschränkt bleibt. Sind Δ' und Δ'' die Maximalabstände der Begrenzungen des Bereichs B' bzw. B'' vom Nullpunkte, so hat man

$$|\psi(z')| < \Delta' + \Delta'' \text{ in } B'_{(\infty)}.$$

Auf den einzelnen Begrenzungskreisen K' des Bereichs B'_ν erleidet diese Funktion Wertschwankungen $D_{K'}$ (— Wertschwankung auf einer Linie definiert als Maximum des absoluten Betrages der Differenz irgendzweier auf der Linie angenommener Funktionswerte —); es ist

$$D_{K'} \leq 2\rho' + 2\rho'',$$

wenn ρ' und ρ'' die Radien der betreffenden Kreislinie K' und der ihr entsprechenden Linie K'' sind. Es ist nun

$$\sum_{B'_\nu} (D_{K'}^2) \leq 4 \sum_{B'_\nu} (\rho'^2 + \rho''^2 + 2\rho'\rho''),$$

folglich wegen

$$2\rho'\rho'' < \rho'^2 + \rho''^2$$

$$\sum_{B'_\nu} (D_{K'}^2) < 8 \sum_{B'_\nu} (\rho'^2 + \rho''^2) = \frac{8}{\pi} (f'_\nu + f''_\nu),$$

mithin

$$(*) \quad \sum_{B'_\nu} (D_{K'})^2 < \frac{8}{\pi} q^{2\nu} (f'_0 + f''_0),$$

$$\lim_{\nu=\infty} \sum_{B'_\nu} (D_{K'}^2) = 0.$$

Das Zeichen B'_ν unter dem Summenzeichen soll andeuten, daß die Summation jedesmal über die sämtlichen Begrenzungslinien des Bereichs B'_ν erstreckt werden soll.

Die Funktion $\psi(z') = w$ leistet eine gewisse eindeutige Abbildung des Bereichs $B'_{(\infty)}$ auf ein Riemannsches Flächenstück $\beta_{(\infty)}$. Dieses liegt ganz im Endlichen, nämlich innerhalb des Kreises mit dem Radius $\Delta' + \Delta''$ um den Nullpunkt. Man kann $\beta_{(\infty)}$ als Grenze wachsender Teilbereiche

$$\beta_{(\infty)} = \lim_{\nu = \infty} \beta_\nu$$

auffassen, wenn mit β_ν das eindeutige Abbild des Bereichs B'_ν durch Ermittlung der Funktion $\psi(z')$ bezeichnet wird. Wegen (*) können wir behaupten, daß die sämtlichen Begrenzungslinien von β_ν sich in ebenso viele Kreisflächen κ einbetten lassen, für welche die Summe der Durchmesserquadrate $< \sum_{B'_\nu} [2 D_{K'}]^2$ ist. Letztere Größe sinkt mit wachsendem

Index ν unter jede Grenze herab. Wir denken ν so groß gewählt, daß $\sum []^2 < \varepsilon$ ist. Konstruieren wir dann in der w -Ebene eine beliebige Kreisfläche mit dem Radius $\sqrt{\varepsilon}$, also dem Inhalt $\pi\varepsilon$, so muß es innerhalb dieser Kreisfläche Punkte geben, die von keiner jener Kreisflächen κ bedeckt werden, für die infolgedessen die Umlaufcharakteristik jeder einzelnen Kreislinie κ , also auch jeder einzelnen Begrenzungslinie von β_ν , den Wert 0 hat. Das bedeutet, daß der betreffende Punkt von β_ν unbedeckt gelassen wird. Wegen des beliebig zulässigen Kleinheitsgrades von ε besagt dies aber, daß β kein noch so kleines zusammenhängendes Flächenstück der w -Ebene wirklich bedecken kann. Daraus folgt, daß $\psi(z')$ eine Konstante sein muß, und zwar gleich 0, weil diese Größe für $z' = \infty$ tatsächlich den Wert 0 hat. Damit ist der *Unitätssatz* bewiesen.

§ 17. Das Iterationsverfahren, das wir hernach zum Beweise der Existenz der Abbildungsfunktion $f(z)$ einschlagen werden, hat zum Grundgedanken, den Bereich B , von welchem ausgegangen wird, sukzessive in Bereiche $B^{(1)}, B^{(2)}, B^{(3)}, \dots$ zu verwandeln, die mit immer höherer *Spiegelungsfähigkeit* ausgestattet sind in dem Sinne, daß die Anwendung des Spiegelungsprozesses, jetzt im Sinne allgemeiner analytischer Spiegelung verstanden, auf jeden der Bereiche bis zu einer Stufe ausführbar sein wird, die schließlich jede Grenze überschreitet. Der Grenzbereich B' wird sich als ein Bereich von unbegrenzter Spiegelungsfähigkeit ergeben, eine Eigenschaft, auf Grund deren er als Kreisbereich erwiesen werden kann. Den mit letzterem angedeuteten Satz wollen wir jetzt vorweg beweisen.

Es sei B' ein den unendlich fernen Punkt in seinem Inneren enthaltender Bereich, der von m regulären analytischen Linien begrenzt wird.

Derselbe sei mit *unbegrenzter Spiegelungsfähigkeit* ausgestattet, d. h.: wir können ihm unbegrenzt durch sukzessive analytische Spiegelung allseitig schlichte Bereiche nebenlagern, die in ihrer Gesamtheit einen schlichten Bereich B'_∞ mit unendlich hohem Zusammenhange ausmachen. B'_ν sei der Bereich ν -ter Stufe, der aus B' bei dem gedachten Spiegelungsprozeß entsteht.

Um zu zeigen, daß sämtliche Begrenzungslinien von B' Kreise sind, betrachten wir die analytische Spiegelung an irgendeiner dieser Begrenzungslinien, die wir mit L' bezeichnen. Durch die Linie L' wird der Bereich B'_ν in zwei zueinander spiegelbildlich symmetrische Hälften zerlegt, die sich vermöge der analytischen Spiegelung an L' eineindeutig entsprechen. Diese analytische Spiegelung selbst ist eine Transformation, die den Bereich B'_ν eineindeutig indirekt konform auf sich selbst abbildet, wobei die Punkte der Linie L' einzeln sich selbst entsprechen. Dem Bereiche B'_ν entspricht dabei ein Teilbereich B''_ν innerhalb B'_∞ , der gleichzeitig mit dem Bereiche B'_ν den Bereich B'_∞ nach und nach vollständig erschöpft, wenn der Index ν über alle Grenzen wächst.

Nehmen wir an, es sei bereits bekannt, daß die Summe der Quadrate der Umfänge aller der unendlich vielen Parzellierungslinien von B'_∞ konvergiert — später zu erweisendes Desiderat —, so folgt daraus, daß die Summe der Quadrate der Umfänge der Begrenzungslinien von B'_ν und von B''_ν mit wachsendem Index unendlich klein wird.

Wir betrachten die Funktion $\bar{z}''(z')$, indem wir mit z'' den Spiegelungspunkt von z' , mit $\bar{z}''$ die zu z'' konjugiert komplexe Größe bezeichnen. Diese Funktion vermittelt eine direkt konforme Abbildung des Bereichs B'_ν auf den Bereich $\bar{B}''_\nu$, der durch Spiegelung des Bereichs B'_ν an der Achse des Reellen entsteht. Bei dieser Abbildung entsprechen sich die unendlich fernen Punkte noch nicht. Man erreicht dies aber durch eine lineare Transformation des Bereichs $\bar{B}''_\nu$. Die dann an Stelle von $\bar{z}''(z')$ zu betrachtende Größe $z'''(z')$, eine lineare Funktion von $\bar{z}''$, bewirkt eine Abbildung des Bereichs B' auf einen Bereich B''' mit ebenfalls unbegrenzter Spiegelungsfähigkeit, für den infolgedessen auch der Satz von der Konvergenz der Summe der Quadrate der Umfänge aller Parzellierungslinien des zugehörigen Bereichs B'''_∞ gilt. Die Größe

$$z''' - z'$$

wird sich nun nach den oben bei Untersuchung der Abbildung der Kreisbereiche B' und B'' aufeinander (Unitätsbeweis) angegebenen Gründen auf den konstanten Wert 0 reduzieren, wenn dieselbe so normiert ist, daß sie im Unendlichen verschwindet. Damit ist gezeigt, daß

$$z''' = \text{lineare Funktion von } z'$$

st, also auch z'' eine lineare Funktion von $\bar{z}'$, d. h. $z''(z')$ eine indirekte Kreisverwandtschaft. Die Beziehung $z''(z')$ läßt nun alle Punkte der Linie L' fest. Denken wir uns durch irgend drei Punkte von L' die Kreislinie K konstruiert, so wird die Spiegelungsbeziehung $\tilde{z}(z')$ an dieser Kreislinie ebenfalls durch einen Ausdruck

$$\tilde{z} = \text{lineare Funktion von } \bar{z}'$$

dargestellt. Diese lineare Funktion muß aber mit der vorhin genannten identisch sein wegen der Übereinstimmung beider Beziehungen an drei verschiedenen Punkten. Daraus folgt, daß L' mit K identisch ist und die zu untersuchende analytische Spiegelung mit der elementaren Inversion an Kreise K zusammenfällt.

Es bleibt noch ein oben formuliertes Desiderat zu erledigen, nämlich der Nachweis zu führen, daß die Summe der Quadrate der Umfänge aller Spiegelbilder eines den unendlich fernen Punkt in seinem Innern enthaltenden m -fach zusammenhängenden Bereichs von unbegrenzter Spiegelungsfähigkeit konvergiert. Dazu stellen wir den folgenden Hilfssatz voran.

Hilfssatz I: Gegeben sei ein von zwei endlichen Linien l_1 und l_2 begrenzter zweifach zusammenhängender schlichter Bereich α , in demselben eine Linie l , die von l_1 umschlossen wird, jedoch l_2 ihrerseits umschließt. Das Gebiet α liegt eingebettet in einem größeren zweifach zusammenhängenden Gebiete A , dessen Begrenzungslinien mit denen von α keinen Punkt gemeinschaftlich haben. Das Gebiet A werde irgendeiner direkt oder indirekt konformen eindeutigen Abbildung unterworfen, durch die es in einen anderen endlichen Bereich A' übergeht, wobei die Linien l in die gleichbezeichneten gestrichenen Linien, das Gebiet α in das Gebiet α' übergehen möge. Unter diesen Voraussetzungen gibt es zwei von der Wahl der Abbildungsfunktion unabhängige endliche, von null verschiedene Größen $Q^{(1)}$ und $Q^{(2)}$, so daß man hat

$$Q^{(1)} < \frac{l'^2}{\alpha'} < Q^{(2)},$$

wobei mit l' der Umfang der gleichbezeichneten Linie, mit α' der Inhalt der gleichbezeichneten Fläche bezeichnet ist.

Beweis: Nach dem Verzerrungssatze gibt es eine von der Wahl der Abbildungsfunktion $f(z)$ unabhängige Größe Q so, daß immer die Beziehung besteht

$$I) \quad \frac{M}{m} \equiv \frac{\text{Max } |f'(z)|}{\text{Min } |f'(z)|} < Q$$

für alle Stellen z des Gebiets α . Daraus folgt

$$\frac{l^2 m^2}{\alpha M^2} < \frac{l'^2}{\alpha'} < \frac{l^2 M^2}{\alpha m^2}$$

$$\frac{l^2 1}{\alpha Q^2} < \frac{l'^2}{\alpha'} < \frac{l^2 Q^2}{\alpha}.$$

Zwecks Anwendung des Hilfssatzes auf den Bereich B'_∞ betten wir jede der Begrenzungslinien des Bereichs B' in einen schmalen zweifach zusammenhängenden Flächenstreifen α und diesen seinerseits in einen etwas breiter zu wählenden Streifen A ein. Diese Figuren werden durch den Spiegelungsprozeß, vermöge dessen B'_∞ aus B' entstanden zu denken ist, auf unendlich viele verschiedene Bereiche α', A' abgebildet, die offenbar endlichen Gesamtflächeninhalt haben, da sie sich bei passender Wahl des Originalstreifen gegenseitig nicht bedecken und ganz im Endlichen liegen. Die Anwendung der Formel (I) lehrt nun unmittelbar die Konvergenz der Summe der Quadrate der Umfänge aller Parzellierungslinien des Bereichs B'_∞ . Das gleiche gilt von der Summe der Quadrate der Umfänge aller Parzellierungslinien des obenerwähnten Bereichs B''_∞ .

Hiermit ist das Desiderat bewiesen.

§ 18. Der nunmehr zu führende Existenzbeweis der Abbildungsfunktion $f(z)$, die den gegebenen Bereich B auf einen Kreisbereich B' mit der Normierung $f(z) = z + ((0))$ im Unendlichen abbildet, beruht, wie schon oben erwähnt, auf dem Gedanken, den Bereich B sukzessive in Bereiche $B^{(1)}, B^{(2)}, \dots$ mit unbegrenzt zunehmendem Grade der Spiegelungsfähigkeit zu verwandeln. Dies wird durch folgendes von uns zweckmäßig als *Iterationsverfahren* zu bezeichnende Verfahren erreicht.

Die Begrenzungslinien des Bereichs B seien $L_1, \dots, L_m$. Das Äußere der Linie L_1 ist ein einfach zusammenhängender Bereich, den wir durch Vermittelung einer Funktion $z_1 = f_1(z)$, gewonnen durch das Schmiegungsverfahren (Abb. I), auf das Äußere eines gewissen Kreises in der Weise abbilden, daß im Unendlichen die Normierungsbedingung

$$f_1(z) = z + ((0))$$

erfüllt wird. Dadurch ist die Abbildungsfunktion völlig bestimmt, weil die Fundamentalabbildung eines einfach zusammenhängenden Bereichs bis auf eine lineare Transformation bestimmt ist.

Bei der soeben definierten Abbildung geht der Bereich B in einen Bereich $B^{(1)}$ über, dessen erste Begrenzungslinie kreisförmig ist. Die $m-1$ andern Begrenzungslinien von $B^{(1)}$ bezeichnen wir mit $L_1^{(1)}, \dots, L_{m-1}^{(1)}$. Der Bereich $B^{(1)}$ spiegeln wir jetzt an der erwähnten Kreislinie und erhalten dadurch einen weiteren Bereich $B_1^{(1)}$ mit $2m-2$ Begrenzungslinien $L_1^{(1)}, L_2^{(1)}, \dots, L_{2m-2}^{(1)}$.

Wir bilden nunmehr das Äußere der Linie $L_1^{(1)}$ auf das Äußere eines Kreises ab durch Vermittelung einer Funktion $z_2 = f_2(z_1)$ mit der Normierung im Unendlichen

$$f_2(z_1) = z_1 + ((0)).$$

Der Bereich $B_1^{(1)}$ geht dabei in einen Bereich $B_1^{(2)}$ mit einer kreisförmigen Begrenzungslinie $B^{(1)}$ als Teilbereich von $B_1^{(1)}$ in einen Bereich $B^{(2)}$ über. Die Linien $L_2^{(1)}, \dots, L_{2m-2}^{(1)}$ gehen in Linien $L_1^{(2)}, \dots, L_{2m-3}^{(2)}$ über. Durch Spiegelung des Bereichs $B_1^{(2)}$ an dem Kreise entsteht ein weiterer Bereich $B_2^{(2)}$ mit $4m - 6$ Begrenzungslinien: $L_1^{(2)}, L_2^{(2)}, \dots, L_{4m-6}^{(2)}$.

Nunmehr wird das Äußere der Linie $L_1^{(2)}$ auf das Äußere eines Kreises abgebildet durch Vermittelung einer Funktion

$$f_3(z_2) = z_2 + ((0)),$$

so daß $B_2^{(2)}$ in einen Bereich $B_2^{(3)}$ mit einer kreisförmigen Begrenzungslinie übergeht, $B^{(2)}$ als Teil von $B_2^{(2)}$ in einen Bereich $B^{(3)}$. Durch Spiegelung an der kreisförmigen Begrenzungslinie von $B_2^{(3)}$ entsteht der weitere Bereich $B_3^{(3)}$ mit $8m - 14$ Begrenzungslinien; usw.

Die Fortsetzung des Verfahrens in inf. ist ersichtlich. Man bemerkt, daß der Bereich $B^{(n)}$ als Teil eines Bereichs $B_{n-1}^{(n)}$ gewonnen wird.

Die Begrenzungslinien von $B^{(n)}$ bezeichnen wir jetzt allgemein mit $L_{(\nu)}^{(n)}$. Auf $B^{(n)}$ können wir den Spiegelungsprozeß bis zu einer gewissen höchsten Stufe μ_n *allseitig* durchführen. Mit $B_{(\nu)}^{(n)}$ ($\nu \leq \mu_n$) bezeichnen wir denjenigen Bereich, der aus $B^{(n)}$ durch Hinzunahme aller Spiegelbilder bis zur ν -ten Stufe entsteht (vgl. die Definition von $\Phi_{\nu}^{(n)}$ in § 14). Die Begrenzungslinien von $B_{(\nu)}^{(n)}$ mögen allgemein mit $L_{(\nu)}^{(n)}$ bezeichnet werden. Die Anzahl derselben ist $m(m-1)^{\nu}$.

§ 19. Wir bezeichnen mit $f_{(\nu)}^{(n)}$ den von den Begrenzungslinien des Bereichs $B_{(\nu)}^{(n)}$ umschlossenen Gesamtflächeninhalt, der aus $m(m-1)^{\nu}$ Teilen besteht. Es gibt dann zwei von n und ν unabhängige Größen G und q , mit $q < 1$; so daß man für $\nu \leq \mu_n$

$$f_{(\nu)}^{(n)} < G q^{\nu}$$

gilt. Der Nachweis dieser Relation bildet ein Hauptstück des ganzen Konvergenzbeweises.

Zum Beweise bemerken wir zunächst, daß die Begrenzungslinien sämtlicher Bereiche $B^{(n)}$ in einem endlichen Bezirke liegen, der von der Wahl des Index n unabhängig ist. Dies folgt aus unserm Verzerrungssatze III, weil die Abbildungsfunktionen

$$f_n(z_{n-1}) \equiv \varphi_n(z)$$

im Unendlichen der Normierungsbedingung

$$\varphi_n(z) = z + ((0))$$

genügen. Wir können daher setzen

$$f_{(0)}^{(n)} < G \quad [n = 1, 2, 3, \dots],$$

indem wir mit $f_{(0)}^{(n)}$ den Gesamtflächeninhalt bezeichnen, den die Begrenzungs-
linien des Bereichs $B^{(n)}$ selbst umschließen. Die Formel (*) wird demnach
bewiesen sein, wenn gezeigt ist, daß für alle n und alle $\nu \leq \mu_n$ eine von
 n und ν unabhängige Größe $q < 1$ existiert so, daß immer gilt

$$(**) \quad f_{(\nu)}^{(n)} < q f_{(\nu-1)}^{(n)}.$$

Hierzu benötigen wir einen neuen Hilfssatz:

Hilfssatz II: Es mögen wieder die Voraussetzungen des Hilfssatzes I
(§ 17) gelten. Bezeichnet dann weiter f'_i den von der inneren, f'_a den
von der äußeren Begrenzungslinie von α' umschlossenen Flächeninhalt, so
gibt es von der Wahl der Abbildungsfunktion unabhängige Größen $q^{(1)}$ und
 $q^{(2)}$, beide < 1 , so daß ist:

$$q^{(1)} < \frac{f'_i}{f'_a} < q^{(2)}.$$

Beweis: Die Linie l'_1 möge die Linie l'_2 umschließen. Dann haben wir

$$\frac{f'_i}{f'_a} = \frac{f'_a - \alpha'}{f'_a} = 1 - \frac{\alpha'}{f'_a};$$

$$\alpha' > \alpha m^2, \quad f'_a < \pi \left(\frac{l'_1}{2}\right)^2 < \frac{4}{\pi} l_1^2 M^2,$$

$$\frac{\alpha'}{f'_a} > \frac{4\alpha m^2}{\pi l_1^2 M^2} = \frac{4}{\pi} \frac{\alpha}{l_1^2 Q^2}$$

$$\frac{f'_i}{f'_a} < 1 - \frac{4}{\pi} \frac{\alpha}{l_1^2 Q^2}.$$

Wird l'_1 von l'_2 umschlossen, so finden wir

$$\frac{f'_i}{f'_a} < 1 - \frac{4}{\pi} \frac{\alpha}{l_2^2 Q^2}.$$

Bezeichnen wir also mit λ den größten der beiden Umfänge l_1, l_2 , so haben
wir in beiden unterschiedenen Fällen:

$$\frac{f'_i}{f'_a} < 1 - \frac{4}{\pi} \frac{\alpha}{\lambda^2 Q^2} = q^{(2)}.$$

Zwecks Bestimmung einer unteren Schranke $q^{(1)}$ denken wir uns das
Gebiet α vergrößert durch zwei Streifen β_1 und β_2 , ersterer an l_1 , letzterer
an l_2 anschließend, beide in A enthalten. $\bar{m}, \bar{M}, \bar{Q} = \frac{\bar{M}}{\bar{m}}$ mögen für das

Gebiet $\alpha + \beta_1 + \beta_2$ dieselbe Bedeutung haben wie m, M, Q für das Gebiet α .

Ist l'_1 die umschließende Linie von α' , so ergibt sich, wenn mit γ' das von $\alpha' + \beta'_1 + \beta'_2$ umschlossene Gebiet bezeichnet wird,

$$\frac{f'_i}{f'_a} = \frac{\beta'_2 + \gamma'}{\alpha' + \beta'_2 + \gamma'} > \frac{\beta'_2}{\alpha' + \beta'_2} > \frac{\beta_2 \bar{m}}{(\alpha + \beta_2) \bar{M}} = \frac{\beta_2}{(\alpha + \beta_2) \bar{Q}}.$$

Ist l'_2 die umschließende Linie von α' , so ergibt sich

$$\frac{f'_i}{f'_a} = \frac{\beta'_1 + \gamma'}{\alpha' + \beta'_1 + \gamma'} > \frac{\beta'_1}{\alpha + \beta'_1} > \frac{\beta_1}{(\alpha + \beta_1) \bar{Q}}.$$

Wird also mit β das kleinere der beiden Gebiete β_1, β_2 bezeichnet, so ist

$$\frac{f'_i}{f'_a} > \frac{\beta}{(\alpha + \beta) \bar{Q}} = q^{(1)}.$$

Der somit vollständig bewiesene Hilfssatz gestattet nun zwei Erweiterungen, die offenbar auf ganz analoge Weise bewiesen werden können, bezüglich deren wir uns daher mit ihrer Feststellung begnügen können.

Erste Erweiterung des Hilfssatzes II: Es sei α ein endlich-fach zusammenhängender schlichter Bereich, der in einem weiteren schlichten Bereiche A eingebettet liegt, wobei α und A keinen Begrenzungspunkt miteinander gemeinschaftlich haben sollen. Der Bereich A werde einer beliebigen eindeutigen konformen Abbildung durch Vermittlung einer regulären Funktion $f(z)$ unterworfen, wobei α und A in die endlichen Bereiche α' und A' übergehen mögen. Es werde mit f'_a der von der äußeren Begrenzungslinie des Bereichs α' umschlossene Flächeninhalt, mit f'_i der von den inneren Begrenzungslinien des Bereichs α' umschlossene Gesamtflächeninhalt bezeichnet. Dann gibt es zwei von der Wahl der Abbildungsfunktion unabhängige Größen $q^{(1)}$ und $q^{(2)}$, beide < 1 , so daß die Beziehungen

$$q^{(1)} < \frac{f'_i}{f'_a} < q^{(2)}$$

bestehen.

Zweite Erweiterung des Hilfssatzes II: Die Beschränkung, daß α und A *endliche* Bereiche sein sollen, werde fallen gelassen, jedoch für die Bildbereiche α' und A' die Forderung ihrer Endlichkeit aufrecht erhalten. Dann gibt es zwei Größen $q^{(1)}$ und $q^{(2)}$, wie vorhin.

Die zweite Erweiterung ergibt sich sofort aus der ersten Erweiterung, wenn man den Bereich A und damit auch α zuvor einer Hilfsabbildung unterwirft, durch die A in einen endlichen Bereich übergeht, und nunmehr die so transformierten Bereiche zum Ausgangspunkt der Betrachtung wählt.

Unser Bereich B werde nunmehr als Bereich α gewählt. Den Bereich A bilden wir durch Hinzufügung zweifach zusammenhängender Zusatzstreifen längs der einzelnen Begrenzungslinien von B . Diese m Zusatzstreifen mögen synonym mit β_1 bezeichnet werden. Wir denken sie uns so schmal gewählt, daß bei Spiegelung jedes derselben an der zugehörigen Begrenzungslinie von B ein ebenfalls schlichter Streifen β_2 entsteht, daß ferner die so gewonnenen m Streifen β_2 ebenfalls endlich sind und sich gegenseitig nicht bedecken. Die Streifen $(\beta_1 + \beta_2)$ der einzelnen Begrenzungslinien mögen als *Begleitstreifen* derselben bezeichnet werden.

Aus unserem Iterationsverfahren ergibt sich sofort, daß auch die Begrenzungslinien von $B_{(\nu)}^{(n)}$ nunmehr mit Streifen β'_1, β'_2 gesäumt erscheinen, die als direkt oder indirekt konforme Bilder der Originalstreifen entstehen. Die Abbildungsbeziehung zwischen den Originalstreifen und Bildstreifen wird durch dieselbe Funktion vermittelt, durch welche die Begrenzungslinien von B auf die Begrenzungslinien von $B_{(\nu)}^{(n)}$ bezogen erscheinen.

Der Bereich $(B_{(\nu)}^{(n)} - B_{(\nu-1)}^{(n)})$ zerfällt in $m(m-1)^\nu$ Bereiche, die sämtlich Bilder des Bereichs B sind. Indem wir unsern Hilfssatz in der zweiten Erweiterung auf diese Bereiche als Bereiche α' anwenden, ergibt sich sofort eine Beziehung der Gestalt

$$f_{(\nu)}^{(n)} < q f_{(\nu-1)}^{(n)},$$

wobei $q < 1$ und unabhängig von n und ν ist. Hieraus folgt weiter

$$f_{(\nu)}^{(n)} < q^\nu f_{(0)}^{(n)} < q^\nu G,$$

wobei auch G von n und ν unabhängig war (vgl. § 19 Anfang).

Die Begrenzungslinien des Bereichs $B_{(\nu)}^{(n)}$ bezeichnen wir synonym mit $L_{(\nu)}^{(n)}$, welche Bezeichnungen wir zugleich für die Umfänge dieser Linien verwenden. Wir sind jetzt imstande die Summe der Quadrate der Umfänge dieser $m(m-1)^\nu$ Begrenzungslinien abzuschätzen. Denn diese Linien sind in Begleitstreifen eingeschlossen, deren Gesamtflächeninhalt kleiner als der gesamte von den Begrenzungslinien von $B_{(\nu-1)}^{(n)}$ umschlossene Flächeninhalt ist, d. h. $< Gq^{\nu-1}$.

Da die erwähnten Begleitstreifen der Linien $L_{(\nu)}^{(n)}$ Bilder von endlich vielen Originalstreifen sind, können wir von dem Hilfssatze I Gebrauch machen und finden eine Beziehung

$$\sum (L_{(\nu)}^{(n)})^2 < q^{\nu-1} GQ,$$

wobei Q eine gewisse von n und ν unabhängige positive GröÙe ist. Hieraus folgt der Satz: Die Summe der Quadrate der Umfänge der $m(m-1)^\nu$ Begrenzungslinien des Bereichs $B_{(\nu)}^{(n)}$ wird unendlich klein, wenn n und ν gleichzeitig über alle Grenzen wachsen, wobei natürlich $\nu \leq \mu_n$ zu bleiben hat.

§ 20. Für unsere Durchführung des Konvergenzbeweises ist noch eine weitere Feststellung nötig, nämlich die, daß es eine von der Wahl des Index n unabhängige, von ν jedoch abhängige Größe d_ν gibt, die eine untere Schranke für die kürzesten Distanzen der Begrenzungslinien des Bereichs $B_\nu^{(n)}$ von denjenigen des Bereichs $B_{(\nu+1)}^{(n)}$ darstellt.

Um eine solche Schranke zu finden, zeigen wir, daß das Vergrößerungsverhältnis

$$\left| \frac{dz_{(\nu)}^{(n)}}{dz} \right|,$$

wenn z auf der Begrenzung von B , $z_{(\nu)}^{(n)}$ auf der Begrenzung von $B_{(\nu)}^{(n)}$ variiert, oberhalb einer endlichen Schranke δ_ν bleibt, die von n unabhängig ist. Dann kann man um jeden Begrenzungspunkt von B eine ganz in dem zugehörigen Begleitstreifen enthaltene Kreisfläche mit einem festen Radius ρ beschreiben; und dieser Kreisfläche muß wegen der Schlichtheit der Abbildung ein die Begrenzung von $B_{(\nu)}^{(n)}$ durchsetzendes Flächenstück entsprechen, das seinerseits eine Kreisfläche mit dem Punkte $z_{(\nu)}^{(n)}$ als Mittelpunkt und einem Radius der Länge $\tilde{Q}\rho\delta_\nu$ vollständig enthält, wobei $\tilde{Q}$ eine universelle Konstante bedeutet. Es besteht nämlich der Satz: Ist

$$F(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

eine für $|z| < 1$ regulär erklärte, das Innere dieses Kreises schlicht abbildende Funktion, so gibt es eine allgemeingültige Konstante $\tilde{Q}$ so, daß die Kreisfläche mit dem Radius $\tilde{Q}$ und dem Nullpunkt als Mittelpunkt vollständig in dem Bildbereiche enthalten ist (vgl. Abh. V, Hilfssatz 8 in § 4).

Zwecks Ermittlung der Größe δ_ν bemerken wir zunächst die Existenz einer Größe δ_0 als einer unteren Schranke für das Verhältnis

$$\left| \frac{dz_{(0)}^{(n)}}{dz} \right|$$

auf der Begrenzung von B . Diese Schranke liefert der Verzerrungssatz II, wenn man denselben auf den Bereich B mit Bezug auf die Abbildungsfunktion $\varphi_n(z)$ anwendet. Es möge nunmehr von dem Bereiche B ein den unendlich fernen Punkt enthaltendes Stück ausgenommen werden, wodurch B in $\mathring{B}$ übergehen möge. Dem Bereiche $\mathring{B}$ entsprechen vermöge der bestehenden Abbildungen reduzierte Parzellen in $B_{(\mu_n)}^{(n)}$. Es sei jetzt $z_{(\nu)}^{(n)}$ der in einer beliebigen Parzelle ν -ter Stufe des Bereichs $B_{(\mu_n)}^{(n)}$ liegende Bildpunkt des im Bereiche $\mathring{B}$ variierenden Punktes z . Dann gibt es eine von n und ν unabhängige Konstante Q' so, daß man hat

$$\text{Max} \left| \frac{dz_{(\nu)}^{(n)}}{dz} \right| : \text{Min} \left| \frac{dz_{(\nu)}^{(n)}}{dz} \right| < Q',$$

d. h.

$$\text{Min} \left| \frac{dz^{(n)}_{(\nu)}}{dz} \right| > \frac{1}{Q'} \text{Max} \left| \frac{dz^{(n)}_{(\nu)}}{dz} \right|.$$

Bedenken wir nun, daß die Parzellen ν -ter Stufe an die Parzellen $(\nu - 1)$ -ter Stufe angrenzen, diese wieder an die Parzellen $(\nu - 2)$ -ter Stufe usw., so erhalten wir sofort eine Beziehung

$$\left| \frac{dz^{(n)}_{(\nu)}}{dz} \right| > \frac{\delta_0}{Q'^{\nu}}.$$

und können also setzen

$$\delta_{\nu} = \frac{\delta_0}{Q'^{\nu}}.$$

§ 21. Die Durchführung des Konvergenzbeweises erfordert die gleichmäßige Abschätzung der Differenz

$$d_{n,m}(z) = \varphi_{n+m}(z) - \varphi_n(z)$$

im Bereiche B mit Einschluß der Begrenzung dieses Bereichs. Es ist darzutun, daß $d_{n,m}(z)$ bei freibleibendem positivem, ganzzahligem m dadurch unter eine beliebig klein gegebene positive GröÙe ε herabgedrückt werden kann, daß man nur n hinreichend groß wählt.

Zu dem Zwecke betrachten wir die GröÙe $d_{n,m}(z)$ als Funktion der GröÙe z_n und schreiben sie dementsprechend

$$\bar{d}_{n,m}(z) \equiv d_m(z^{(n)}) \equiv z^{(n+m)} - z^{(n)}.$$

Die Funktion $\bar{d}_m(z^{(n)})$ ist nun nicht nur im Bereiche $B_{(0)}^{(n)}$, sondern in dem weiteren Bereiche $B_{(\mu_n)}^{(n)}$ erklärt. Sie ist auch im unendlich fernen Punkte regulär und nimmt dort den Wert 0 an. Die Summe der Quadrate der Wertschwankungen dieser Funktion auf den Begrenzungslinien von $B_{(\mu_n)}^{(n)}$ werde mit $\sum (d_{(\mu_n)}^{(n)})^2$ bezeichnet. Wir haben dann

$$\begin{aligned} \sum (d_{(\mu_n)}^{(m)})^2 &< \frac{1}{4} \sum (L_{(\mu_n)}^{(n)} + L_{(\mu_n)}^{(n+m)})^2 \\ &< \frac{1}{2} \sum [(L_{(\mu_n)}^{(n)})^2 + (L_{(\mu_n)}^{(n+m)})^2], \end{aligned}$$

d. h.

$$\sum (d_{(\mu_n)}^{(m)})^2 < G q^{(\mu_n-1)} Q.$$

Indem man nunmehr n und damit zugleich μ_n über alle Grenzen wachsen läßt, ergibt sich, daß diese SchwankungsgröÙe bei freibleibendem m unter jede Grenze herabgedrückt werden kann allein durch genügend große Wahl von n . Wir können also setzen

$$\sum (d_{(\mu_n)}^{(m)})^2 < \varepsilon.$$

Durch Vermittelung der Funktion $d_m(z^{(n)})$ wird das Gebiet $B_{(\mu_n)}^{(n)}$ auf ein gewisses Riemannsches Flächenstück β eindeutig abgebildet. Dieses liegt in einem von n und m abhängig bestimmbaren endlichen Bezirke. Die Begrenzungslinien von β lassen sich in lauter Kreisflächen einschließen, deren Gesamtflächeninhalt entsprechend der letztgewonnenen Relation $< \pi \varepsilon$ ist. Der Bereich β kann aber nach dem Satze von der Charakteristik nur solche Punkte der Ebene bedecken, die von mindestens einer Begrenzungslinie des Bereichs β wirklich umschlossen werden. Dies hat zur Folge, daß das von β tatsächlich bedeckte Gebiet der schlichten Ebene einen unterhalb $\pi \varepsilon$ liegenden Flächeninhalt hat.

Um jeden endlichen Punkt des Bereichs $B^{(n)}$ kann man eine Kreisscheibe mit dem Radius d_0 beschreiben, die ganz in $B_{(1)}^{(n)}$, also auch ganz in $B_{(\mu_n)}^{(n)}$ enthalten ist. Da $d_m(z^{(n)})$ beschränkt ist, folgt hieraus mit Rücksicht auf das soeben gefundene Ergebnis, daß die Ableitung der Funktion $d_m(z^{(n)})$ nach der Größe $z^{(n)}$ im Bereiche $B^{(n)}$ eine Größe ist, die gleichmäßig unendlich klein wird, wenn n über alle Grenzen wächst. Nimmt man von B ein den unendlich fernen Punkt enthaltendes Stück aus, so daß aus B ein Bereich $\hat{B}$ entsteht, dessen Bild in $B^{(n)}$ mit $\hat{B}^{(n)}$ bezeichnet werde, so ergibt sich für diesen Bereich $\hat{B}^{(n)}$ die Möglichkeit, ihn mit einer endlichen von n unabhängigen Anzahl von Kreisscheiben auszuschöpfen. Daraus erkennt man, daß auch die Schwankung der Funktion $d_m(z^{(n)})$ im Gebiete $\hat{B}^{(n)}$ gleichmäßig unendlich klein wird, wenn n über alle Grenzen wächst. Dies gilt dann auch für den Bereich $B^{(n)}$ selbst, weil $d_m(z^{(n)})$ im Unendlichen regulär ist. Da letztere Funktion im Unendlichen den Wert 0 annimmt, ergibt sich also schließlich, daß die Größe $d_m(z^{(n)})$ selbst in $B^{(n)}$ gleichmäßig unendlich klein wird, wenn n über alle Grenzen wächst.

Damit ist der Konvergenzbeweis zu Ende geführt. Die Grenzfunktion

$$\varphi_\infty(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(z)$$

wird im Unendlichen ebenso wie die Näherungsfunktionen unendlich, nämlich in der Form

$$\varphi_\infty(z) = z + ((0)).$$

Sie bildet den Bereich B auf einen Bereich $B^{(\infty)}$ ab, dessen Begrenzungslinien ebenfalls regulär analytisch sind. Dieser Grenzbereich besitzt zudem unbegrenzte Spiegelungsfähigkeit, ist mithin nach früheren Entwicklungen ein Kreisbereich, wie verlangt worden ist. Das Bestehen dieser unbegrenzten Spiegelungsfähigkeit leuchtet am besten durch den Hinweis darauf ein, daß man die gleichmäßige Konvergenz der Funktion $d_m(z^{(n)})$, wie für den Bereich B bzw. $B^{(n)}$, auch für jeden Bereich $B_{(\nu_0)}^{(n)}$, (ν_0 fest),

führen kann. An Stelle der oben benutzten Größe d_0 hat man dann von der Größe d , Gebrauch zu machen, deren Existenz oben (§ 20 Anfang) bewiesen worden ist.

Sechster Teil.

Uniformisierung beliebiger hyperelliptischer Kurven nach Schottkyschem Typus; Sicheltheorem.

§ 22. Wie die Aufgabe einen allgemeinen mehrfach zusammenhängenden schlichten Bereich B auf einen Kreisbereich B' abzubilden als Verallgemeinerung der analogen Abbildungsaufgabe für symmetrische mehrfach zusammenhängende Bereiche zur Behandlung gelangte, wollen wir jetzt schließlich noch die Aufgabe der Uniformisierung reeller hyperelliptischer Kurven auf beliebige hyperelliptische Kurven (z, w)

$$w^2 = (z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_{2p+2})$$

ausdehnen. Bei dieser Ausdehnung wird naturgemäß die auf reelle Kurven zugeschnittene Forderung der Realität der Uniformisierenden fallen gelassen werden müssen. Die Grundidee der Verallgemeinerung der Problemstellung finden wir, wenn wir diejenige Auffassung der Uniformisierenden $\zeta(z, w)$ zugrunde legen, bei der diese Größe als Abbildungstranszendente erscheint, durch deren Vermittelung die längs p Rückkehrschnitten aufgeschnittene Riemannsche Fläche auf einen $2p$ -fach zusammenhängenden Fundamentalbereich Φ_0 mit p die Randlinien paarweise einander zuordnenden Randsubstitutionen abgebildet wird. Die Aufschneidung der Riemannschen Fläche F erfolgte dabei längs p die Verzweigungspunkte paarweise miteinander verbindender Einschnitte, die, sofern sie durch beide Blätter der Riemannschen Fläche hindurchgeführt wurden, auf dieser p Rückkehrschnitte lieferten.

Als sinngemäße neue Problemstellung, der wir uns nunmehr zuwenden erscheint somit die folgende: Die Windungspunkte der Riemannschen Fläche F der allgemeinen hyperelliptischen Kurve (z, w) denke man sich irgendwie in p Paare eingeteilt, etwa:

$$a_1, a_2; a_3, a_4; \dots; a_{2p+1}, a_{2p+2}.$$

In der z -Ebene ziehe man nunmehr $p+1$ Verbindungslinien

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{p+1},$$

die sich gegenseitig nicht treffen. Die mit den Linien λ ausgestattete z -Ebene F werde mit $F_{(0)}$ bezeichnet. Führt man durch die beiden Blätter der Riemannschen Fläche F hindurch Schnitte längs der Linien $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, so entstehen auf F p getrennte Rückkehrschnitte $[\lambda_1], \dots, [\lambda_p]$, welche F

eine $2p$ -fach zusammenhängende schlichtartige Fläche F_0 verwandeln. Fügt man noch den Rückkehrschnitt $[\lambda_{p+1}]$, entsprechend λ_{p+1} , hinzu, so zerfällt F in zwei $(p+1)$ -fach zusammenhängende schlichte Blätter F_0 . Die Aufgabe ist dann folgende:

Aufgabe: Es soll auf der Fläche F bzw. auf der Kurve (z, w) eine innerhalb relativ unverzweigte Uniformisierende $\zeta(z, w)$ bestimmt werden, die bei Durchlaufung jedes der erwähnten $p+1$ Rückkehrschnitte zu ihrem Ausgangswerte zurückkehrt. —

Zieht man auf F geschlossene Linien $[\lambda'_1], \dots, [\lambda'_{p+1}]$, die als Linien der schlichten Ebene aufgefaßt die Linien $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1}$ einzeln der Reihe nach umschlingen, wie Fig. 16 zeigt, so sind damit auf F $p+1$ Rückkehrschnitte gekennzeichnet, die aus den Rückkehrschnitten $[\lambda_1], \dots, [\lambda_{p+1}]$ durch Deformation auf F entstehen, für unsere Problemstellung also letztere Rückkehrschnitte vertreten können. Diese Bemerkung sei hier nur beiläufig gemacht.

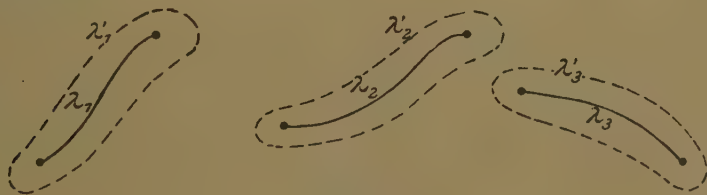


Fig. 16.

Wir kehren wieder zu unsern Rückkehrschnitten $[\lambda_1], \dots, [\lambda_{p+1}]$ zurück und bemerken, was ohne weiteres einleuchtet, daß die Forderung, die Größe ζ solle bei Durchlaufung der genannten $p+1$ Rückkehrschnitte stets zu ihrem Ausgangswerte zurückkehren, auch durch dieselbe Forderung für nur p der Rückkehrschnitte ersetzt werden kann, da die Erfüllung dieser Forderung für den $(p+1)$ -ten Rückkehrschnitt dann von selbst eintritt.

Da $\zeta(z, w)$ eine einfachwertige Funktion sein muß, so entspricht der aus den Rückkehrschnitten $[\lambda_2], \dots, [\lambda_{p+1}]$ aufgeschnittenen Riemannschen Fläche F , d. i. F_0 , ein $2p$ -fach zusammenhängender Bereich in der ζ -Ebene, welcher Zweig der Funktion $\zeta(z, w)$ auch gewählt wird. Die den unendlich vielen Zweigen dieser Funktion solcherweise entsprechenden schlichten Bereiche schließen sich notwendigerweise zu einem Ganzen zusammen, nämlich einem unendlich-vielfach zusammenhängenden schlichten Bereiche $\Phi^{(\infty)}$.

Die unendlich vielen $2p$ -fach zusammenhängenden Parzellen des Bereichs $\Phi^{(\infty)}$ sind durch die Zweigsubstitutionen der Funktion $\zeta(z, w)$ aufeinander bezogen. Bedenkt man, daß der Aufbau der Überlagerungsfläche $F^{(s)}$, als deren Bild $\Phi^{(\infty)}$ erscheint, aus lauter Flächenstücken F_0

erfolgt, die dabei topologisch durchaus gleichberechtigt eingehen, so erkennt man, daß jene Zweigsubstitutionen eindeutige Abbildungen des Bereichs $\Phi^{(\infty)}$ auf sich selbst bewirken. Unsere Methode des Verzerrungssatzes und der Begleitstreifen lehrt dann, daß die Summe der Quadrate der Umfänge aller Parzellierungslinien von $\Phi^{(\infty)}$ konvergiert. Daraus schließen wir, daß der Bereich $\Phi^{(\infty)}$ von der ganzen Ebene mit Ausnahme von unendlich vielen diskreten Punkten, in dem besonderen Falle $p=1$ nur zwei diskreten Punkten, gebildet wird und daß die Zweigsubstitutionen linear sein müßten.

§ 23. Grundlegend für die Anwendung unserer *Iterationsmethode* zur Bestimmung der Transzendenten $\zeta(z, w)$ ist nun wieder die Auffassung derselben als einer Funktion $\zeta(z)$. Als solche ist sie durch folgende Eigenschaften charakterisiert: $\zeta(z)$ ist eine im allgemeinen unverzweigte, nur in den Endpunkten der Linien λ Verzweigungspunkte erster Ordnung darbietende Uniformisierende der schlichten z -Ebene F , welche außerdem in der längs der $p+1$ Linien λ aufgeschnitten gedachten schlichten Ebene, d. i. in F_0 , in jedem ihrer Zweige eindeutig ist, wozu letzteres auch so ausgedrückt werden kann: Die Funktion $\zeta(z)$ reproduziert sich bei einfacher Umlaufung irgendeines der $p+1$ Punktepaare, die durch die Linien λ miteinander verbunden sind, d. h. bei Durchlaufung der Linien $\lambda'_1, \dots, \lambda'_{p+1}$, wenn diese als Linien der schlichten z -Ebene aufgefaßt werden.

Diese Auffassung ergibt sich ohne weiteres aus den topologischen Besonderheiten der Problemstellung. Die Überlagerungsfläche $F^{(\infty)}$ werden wir dieser Auffassung entsprechend als eine Fläche $F^{(\infty)}$ betrachten, die aus unendlich vielen Exemplaren F_0 zusammengesetzt ist, wenn F_0 die längs $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1}$ aufgeschnittene schlichte Ebene F bezeichnet. Der Fläche F_0 entspricht ein schlichter Bereich Φ_0 in der ζ -Ebene vermöge der Abbildung durch den Hauptzweig der Funktion $\zeta(z)$, der im Unendlichen der Normierungsbedingung

$$\zeta(z) = z + ((0))$$

unterworfen zu denken ist. Die unendlich vielen durch die Zweige der Funktion $\zeta(z)$ gelieferten äquivalenten ζ -Bereiche können sich in topologischer Beziehung nur auf eine Weise zu einem schlichten Bereiche, dem unendlich vielfach zusammenhängenden Bereiche $\Phi^{(\infty)} \equiv \Phi^{(\infty)}$ zusammenschließen. Daraus folgt, daß die unendlich vielen Blätter F_0 der Fläche $F^{(\infty)}$ gleichberechtigt in den Bau dieser Fläche eingehen. Die Beziehung zwischen je zwei Zweigen der Funktion $\zeta(z)$ stellt sich folglich als eine eindeutige Abbildung der Fläche $\Phi^{(\infty)}$ auf sich selbst dar, ist also ebenfalls linear. Wir finden so, daß dem Bereiche F_0 vermöge des Hauptzweiges ein Fundamentalbereich Φ_0 entspricht, dessen $p+1$ geschlossene Begrenzungs-

ien je in zwei Teile zerlegt erscheinen, die durch eine elliptische lineare Substitution der Periode 2 aufeinander bezogen sind; vgl. Fig. 17.

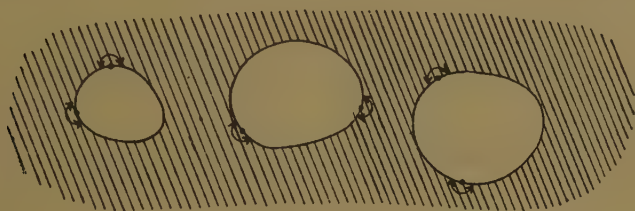


Fig. 17.

Die vorstehenden Überlegungen lassen die Analogie mit dem Problem der reellen Uniformisierung reeller hyperelliptischer Kurven klar zutage treten. Was die Behandlungsmethode des jetzt vorliegenden allgemeineren Problems betrifft, so übersehen wir ohne weiteres die Möglichkeit, die Fläche $F^{(\infty)}$ durch *topologische Iteration* an Hand der Linien λ in derselben Weise wie im symmetrischen Falle zu bilden. Gleichfalls übersehen wir sofort, in welcher Weise die Transzendente $\zeta(z)$ durch Iteration zu finden ist. Wir haben genau die früher im symmetrischen Falle angegebene Regel zu befolgen, mit Hilfe der *Linien λ als Transformationslinien* eine unendliche Kette elementarer Wurzeltransformationen zu bilden unter Einhaltung der Normierungsbedingung im Unendlichen. Der Konvergenzbeweis jedoch kann nicht wie im symmetrischen Falle durchgeführt werden. Für diesen werden vielmehr die Prinzipien maßgebend, die wir im Beweise der Existenz der allgemeinen Abbildung auf einen Kreisreich anwandten; d. h.: es tritt an Stelle der Betrachtung der Umfänge, der Begleitintervalle usw. die Betrachtung der Summe der Quasitel der Umfänge, der Flächeninhalte der Begleitstreifen usw. Was die letzteren anbetrifft, so wird man die Originalstreifen jetzt nicht beim Ausgangsbereiche, sondern erst bei demjenigen Bereiche einführen, der nach Ausführung der ersten $p+1$ Transformationen der Iterationskette aus demselben hervorgegangen ist. Denn erst nach diesen Transformationen scheint der Originalbereich durch einen $(p+1)$ -fach zusammenhängenden Bereich mit $p+1$ einfach geschlossenen Begrenzungslinien, nämlich $p+1$ aufgelösten Linien λ , ersetzt.

Die Methode unseres Nachweises dafür, daß die Zweige der Funktion $\zeta(z)$ bzw. $\zeta(z, w)$ durch lineare Substitutionen aufeinander bezogen sein müssen, läßt auch erkennen, daß diese Größen durch die von ihnen verlangten Eigenschaften bis auf eine lineare Substitution völlig bestimmt sind, wenn die Normierungsbedingung fallen gelassen wird (Unitätssatz).

§ 24. Das im vorhergehenden behandelte Uniformisierungsproblem gestattet eine durch die dargelegte Auffassung der Größe $\zeta(z, w)$ als einer Größe $\zeta(z)$ nahegelegte Verallgemeinerung: Es soll eine in der schlichten z -Ebene F im allgemeinen unverzweigte, nur in den Endpunkten von m getrennten Linien λ_α Verzweigungspunkte $(\nu_\alpha - 1)$ -ter Ordnung darbietende Uniformisierungstranszendente $\zeta(z)$ bestimmt werden, die in allen ihren Zweigen

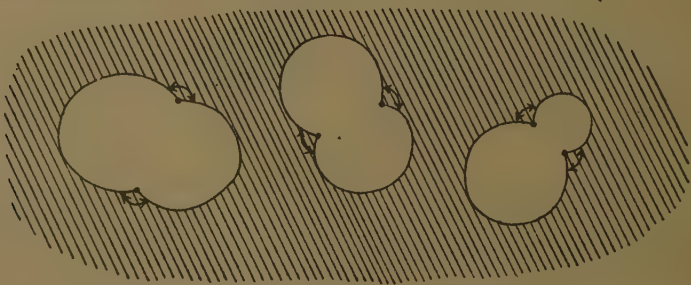


Fig. 18.

in der längs sämtlicher Linien λ_α aufgeschnittenen Ebene eindeutig ist. Die Größe $\zeta(z)$ wird alsdann eine Abbildung dieser aufgeschnittenen Ebene auf einen Bereich Φ_0 vermitteln, dessen m Begrenzungslinien zweieckförmig sind und durch elliptische Substitutionen der Ordnung ν_α (entsprechend λ_α) auf sich selbst bezogen erscheinen, wie Fig. 18 zeigt (Sichelttheorem). Die Figg. 19 und 20 erläutern den symmetrischen Fall.

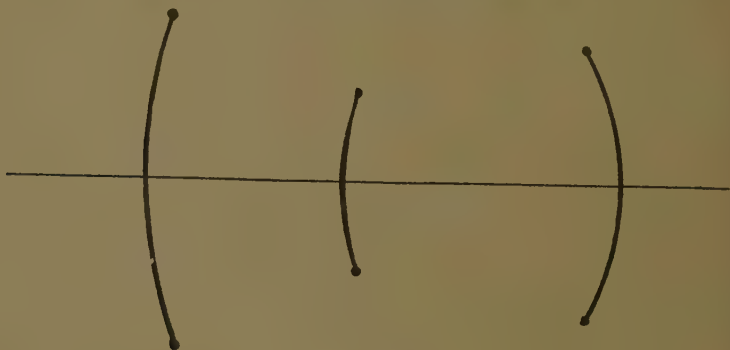


Fig. 19.

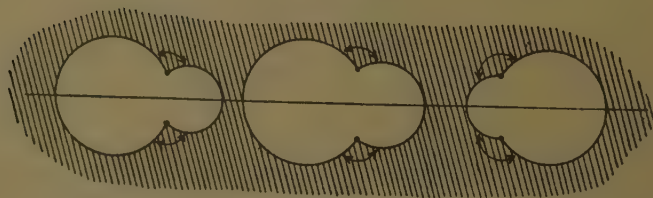


Fig. 20.

Auch bezüglich dieser Problemstellung gilt der Satz, daß die Größe $\zeta(z)$ gesehen von einer linearen Transformation völlig bestimmt ist, d. h. überhaupt bestimmt bei Einführung der Normierungsbedingung im Unendlichen. Der Existenzbereich wird durch das *Iterationsverfahren* geliefert. Der Unterschied gegen früher ist jetzt nur der, daß an Stelle der Quadratwurzeloperationen Wurzeloperationen höherer Ordnung heranzuziehen sind. Jede einzelne Transformation der Iterationskette leistet jedesmal die Abbildung einer ν_α -blättrigen Riemannschen Fläche vom Geschlechte Null auf den Endpunkten einer unaufgelösten Linie λ als Windungspunkten $(\nu_\alpha - 1)$ -ter Ordnung auf einen schlichten Bereich unter Einhaltung der Normierungsbedingung im Grundblatt. Die sukzessive Einführung neuer Linien λ im Zusammenhange mit diesen Transformationen erfolgt jetzt durch jeweilige Ausübung der bei diesen Transformationen sich einstellenden Möbiustransformationen linearen Substitutionen nebst deren Wiederholungen.

Weitere Bemerkungen über die Durchführung des Existenzbeweises ergaben sich wegen der durchsichtigen Analogie mit dem vorherigen Problem nicht mehr erübrigen.

(Eingegangen am 21. November 1919.)

Bemerkungen zu einer Fragestellung des Herrn Pólya

Von

Hans Hamburger in Berlin.

1. In einer Abhandlung über ganze Funktionen vom Geschlechte Null und Eins¹⁾ hat Herr Pólya die beiden Sätze bewiesen:

I. Es sei $g(z)$ eine ganze transzendente Funktion, die sich in ein Produkt der Form

$$(1) \quad g(z) = C e^{-\beta z^2 + \alpha z} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - \alpha_{\nu} z) e^{\alpha_{\nu} z}$$

zerlegen läßt. Hierbei seien alle Parameter $C, \beta, \alpha, \alpha_1, \dots$ reelle Größen; außerdem sei sogar $C > 0, \beta \geq 0$. Es sei endlich $g(z)$ von einer Funktion der Form $C e^{\alpha z}$ verschieden.

Entwickelt man $\frac{1}{g(z)}$ an der Stelle $z = 0$ in eine Potenzreihe

$$\frac{1}{g(z)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_{\nu}}{\nu!} z^{\nu},$$

so sind die Determinanten

$$(2) \quad C_m = \begin{vmatrix} c_0 & , & c_1 & , & \dots & , & c_{m-1} \\ c_1 & , & c_2 & , & \dots & , & c_m \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ c_{m-1} & , & c_m & , & \dots & , & c_{2m-2} \end{vmatrix}.$$

für alle m positiv.

¹⁾ G. Pólya, Algebraische Untersuchungen über ganze Funktionen vom Geschlechte Null und Eins, Journ. f. reine u. angewandte Math., 145 (1915), S. 224–249 vgl. insbes. S. 235–237. Etwas weitergehende Resultate finden sich in einer Abhandlung von Herrn Pólya in ungarischer Sprache: Positiv quadratik alakokról a melyeknek mátrixa Hankel-féle, Matematikai és természettudományi értesítő 32 (1914), S. 656–679.

II. Es sei $h(z)$ eine ganze transzendente Funktion, die sich in ein Produkt der Form

$$h(z) = C e^{\beta z} \prod_{v=1}^{\infty} (1 - \beta_v z)$$

ausgedr. werden läßt. Hierbei sei $C > 0$, $\beta, \beta_1, \beta_2, \dots \geq 0$.

Außerdem sei $h(z)$ von einer Funktion der Form $C e^{\beta z}$ ($\beta \geq 0$) verschieden.

Entwickelt man $\frac{1}{h(z)}$ an der Stelle $z = 0$ in eine Potenzreihe

$$\frac{1}{h(z)} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{c_v}{v!} z^v,$$

sind außer sämtlichen Determinanten C_m auch sämtliche Determinanten

$$B_m = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_m \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_m & c_{m+1} & \dots & c_{2m-1} \end{vmatrix}$$

positiv.

Herr Pólya fragt nun: Wenn

$$f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{c_v}{v!} z^v$$

die Reziproke einer ganzen Funktion ist und

I. sämtliche Koeffizientendeterminanten $C_m > 0$,

II. sämtliche Koeffizientendeterminanten $C_m > 0$, $B_m > 0$ sind, ist dann die Weierstraßsche Produktzerlegung der ganzen Funktion $\frac{1}{f(z)}$ im Falle I von der Form (1), im Falle II von der Form (3)? Insbesondere: Wieviele Nullstellen hat die Funktion $\frac{1}{f(z)}$ im Falle I nur reelle Nullstellen, im Falle II nur reelle positive Nullstellen?

2. Diese Frage wird, nachdem im § 1 einige bereits bekannte vorbereitende Sätze zusammengestellt sind, im § 2 verneint. Es wird dort ein Polynom $G(z)$ mit komplexen Nullstellen und eine ganze transzendente Funktion $g(z)$ mit komplexen Nullstellen angegeben, deren Reziproke sich an der Stelle $z = 0$ in eine Potenzreihe $\sum_{v=0}^{\infty} \frac{c_v}{v!} z^v$ mit nur positiven Koeffizienten entwickeln läßt.

Im § 3 werden beliebige Potenzreihen

$$f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{c_v}{v!} (z - \alpha)^v$$

mit endlichem Konvergenzkreis und positiven Koeffizientendeterminanten C_m bzw. C'_m und B_m betrachtet und es wird über sie der Satz bewiesen:

Ist $f(z)$ eine im Innern des auf der reellen Achse gelegenen Intervalls $a < z < b$ reguläre analytische Funktion, ist ferner α ein gegebener innerer Punkt dieses Intervalls und sind die aus den Koeffizienten c_n der Potenzreihe (5) gebildeten Determinanten C_m sämtlich positiv, so ist $f(z)$ im Innern des Vertikalstreifens $a < x < b$ (unter x der reelle Teil von z verstanden) regulär analytisch und läßt sich in diesem Bereich durch ein für $a + \delta \leq x \leq b - \delta$ absolut und gleichmäßig konvergentes Stieltjes'sches Integral der Form

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zu} d\Phi(u)$$

darstellen.

Ist also $\xi_1 < x < \xi_2$ der genaue Konvergenzbereich des Integrals $f(z)$, so ist $\xi_1 \leq a$, $\xi_2 \geq b$ und die reellen Punkte $z = \xi_1$, $z = \xi_2$ sind singuläre Stellen der Funktion $f(z)$.

Sind außer den Determinanten C_m auch die aus den c_n gebildeten Determinanten B_m positiv, so ist $f(z)$ in der ganzen Halbebene $x < b$ regulär analytisch und läßt sich dort durch ein für $x \leq b - \delta$ absolut und gleichmäßig konvergentes Stieltjes'sches Integral

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{zu} d\Phi(u)$$

darstellen²⁾.

Ist also $x = \xi$ die wahre Konvergenzgerade des Integrals $f(z)$, so ist $\xi \geq b$ und der reelle Punkt $z = \xi$ eine singuläre Stelle von $f(z)$.

Im § 4 wird dieser Satz auf den Fall angewendet, daß $f(z)$ die Reziproke einer ganzen transzendenten Funktion ist. Es wird ferner durch ein Beispiel gezeigt, daß die Eigenschaft der Potenzreihenentwicklung von $f(z) = \frac{1}{g(z)}$, an einer Stelle $z = \alpha$ auf positive Koeffizientendeterminanten C_m zu führen, lokaler Natur ist, d. h., daß die Determinanten C'_m , die entsprechend aus den Koeffizienten c'_n der Potenzreihenentwicklung von $\pm f(z)$ an einer andern Stelle der reellen Achse $z = \beta$,

²⁾ Die Existenz von $f(z)$ in einem Vertikalstreifen von der Breite 2ϱ , wenn mit ϱ der Konvergenzradius der Potenzreihe (5) bezeichnet wird, bzw. in der Halbebene $x < b$, wenn auch die Determinanten B_m sämtlich positiv sind, habe ich mit elementarerem Hilfsmitteln, ohne die tiefliegenden Stieltjes'schen Integraldarstellungen zu benutzen, in einer Arbeit: „über die Konvergenz eines mit einer Potenzreihe assoziierten Kettenbruchs“ bewiesen, die in den Mathematischen Annalen erscheinen wird.

$$\pm f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{c'_v}{v!} (z - \beta)^v, \quad (c'_0 = \pm f(\beta) > 0)$$

gebildet sind, nicht sämtlich positiv sein müssen, wenn die Punkte $z = \alpha$ und $z = \beta$ durch einen Pol von $f(z)$ auf der reellen Achse getrennt sind.

In § 5 endlich wird gezeigt, daß die im § 4 betrachteten Typen von Reziproken ganzer Funktionen nicht notwendig auf Potenzreihenentwicklungen mit positiven Koeffizientendeterminanten C_m und B_m führen.

§ 1.

3. Um später unsere Ausführungen nicht zu unterbrechen, stellen wir hier einige im folgenden mehrfach angewandte, bereits bekannte einfache Hilfssätze zusammen.

Hilfssatz 1. Es sei eine unendliche Folge von Koeffizienten c_v vorgelegt, die sich durch Stieltjessche Integrale der Form

$$c_v = \int_{-\infty}^{+\infty} u^v \varphi(u) d\Phi(u) \quad (v = 0, 1, \dots, \infty)$$

darstellen lassen. Hierbei werden mit $\varphi(u)$ und $\Phi(u)$ im Intervall $-\infty < u < +\infty$ definierte reelle Funktionen bezeichnet, von denen $\varphi(u)$ beständig ≥ 0 sei und $\Phi(u)$ mit wachsendem u nirgends abnehmen möge. Dann sind die aus den c_v gebildeten in Formel (2) der Einleitung definierten Determinanten C_m sämtlich positiv³⁾.

Hilfssatz 2. Es sei eine unendliche Folge von Koeffizienten c_v vorgelegt, die sich durch Stieltjessche Integrale der Form

$$c_v = \int_0^{\infty} u^v \varphi(u) d\Phi(u) \quad (v = 0, 1, \dots, \infty)$$

darstellen lassen; die Funktionen $\varphi(u)$ und $\Phi(u)$ mögen denselben Bedingungen wie im Hilfssatz 1 unterworfen sein. Dann sind die aus den Koeffizienten c_v gebildeten, in den Formeln (2) und (4) definierten Determinanten C_m und B_m sämtlich positiv⁴⁾.

Hilfssatz 3. Es sei $f(u) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v u^v$ eine beliebige ganze transzendente Funktion von u ; man setze ferner $\tilde{f}(u) = \sum_{v=0}^{\infty} |a_v| u^v$. Sind $\varphi(u)$ und $\Phi(u)$ reelle Funktionen mit den gleichen Eigenschaften wie in Hilfssatz 1 und ist außerdem das Integral

³⁾ Vgl. z. B. O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig 1913, S. 377–378.

⁴⁾ l. c. Anm. ³⁾.

$$\int_0^{\infty} \tilde{f}(u) \varphi(u) d\Phi(u)$$

konvergent, so ist

$$\int_0^{\infty} f(u) \varphi(u) d\Phi(u) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \int_0^{\infty} u^r \varphi(u) d\Phi(u) \quad ^5).$$

Hilfssatz 4. Es habe $f(u)$, $\tilde{f}(u)$, $\varphi(u)$ und $\Phi(u)$ dieselbe Bedeutung wie in Hilfssatz 3. Es werde nunmehr die unendliche Reihe

$$\sum_{r=0}^{\infty} |a_r| \int_0^{\infty} u^r \varphi(u) d\Phi(u)$$

als konvergent vorausgesetzt. Dann ist

$$\int_0^{\infty} f(u) \varphi(u) d\Phi(u) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \int_0^{\infty} u^r \varphi(u) d\Phi(u) \quad ^6).$$

Die beiden Hilfssätze 3 und 4 sind einfache Verallgemeinerungen des bekannten Satzes, daß bei der Summation absolut konvergenter Doppelreihen die Reihenfolge, in der summiert wird, gleichgültig ist.

Hilfssatz 5. Es sei das Stieltjessche Integral

$$(6) \quad f(z) = \int_0^{\infty} e^{zu} \varphi(u) d\Phi(u)$$

vorgelegt und $\Re(z) = x < \xi$ seine genaue Konvergenzhalbene. Haben die reellen Funktionen $\varphi(u)$ und $\Phi(u)$ die gleichen Eigenschaften wie in den übrigen Hilfssätzen, so ist der reelle Punkt $z = \xi$ eine singuläre Stelle von $f(z)$ ⁷⁾.

Zusatz: Ist $x > \xi$ die Konvergenzhalbene des Stieltjesschen Integrals

$$(6') \quad f(z) = \int_{-\infty}^0 e^{zu} \varphi(u) d\Phi(u),$$

⁵⁾ Vgl. etwa H. Hamburger, Beiträge zur Konvergenztheorie der Stieltjesschen Kettenbrüche, Math. Zeitschr., 4 (1919), S. 186–222, insbesondere § 1, S. 193. Der Beweis ist hier nur für ein gewöhnliches Integral durchgeführt, doch bedarf er keiner Abänderung, wenn man die Integrale durch Stieltjessche ersetzt.

⁶⁾ I. c. Anm. ⁵⁾, S. 195.

⁷⁾ Dieser Satz wurde für gewöhnliche Integrale zum erstenmal von Herrn Landau in einer Arbeit, Über einen Satz von Tschebyschef, Math. Ann., 61 (1905) S. 527–550 (vgl. insbes. S. 546–548) ausgesprochen und bewiesen. Auf den Fall Stieltjesscher Integrale läßt sich der Landausche Beweis ohne Abänderung übertragen. Vgl. auch E. Landau, Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen, Sitz.-Ber. der Bayer. Akad. der Wissenschaften, 36 (1906), S. 151–218. Siehe insbes. S. 217.

und haben die reellen Funktionen $\varphi(u)$ und $\Phi(u)$ die gleichen Eigenschaften wie in den übrigen Hilfssätzen, so ist der reelle Punkt $z = \xi$ eine singuläre Stelle von $f(z)$.

Dieser Zusatz wird durch die Substitution $z' = -z$, $u' = -u$ unmittelbar auf den Hilfssatz 5 zurückgeführt.

§ 2.

4. Erstes Beispiel. Man setze

$$(7) \quad G_n(z) = -(z-1) \prod_{\nu=1}^n [(z-1)^2 + \nu^2].$$

Dieses Polynom vom Grade $2n+1$ verschwindet für $z = 1 \pm i\nu$ ($\nu = 0, 1, \dots, n$).

Entwickelt man $\frac{1}{G_n(z)}$ in eine Potenzreihe

$$(8) \quad \frac{1}{G_n(z)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu!} z^\nu,$$

so sind die aus den Koeffizienten c_ν gebildeten Determinanten C_m und B_m für alle m positiv.

Beweis. Für die Reziproke des Polynoms $G_n(-z+1) = z \prod_{\nu=1}^n (z^2 + \nu^2)$ findet man die Integraldarstellung

$$(9) \quad \frac{1}{G_n(-z+1)} = \frac{2^n}{(2n)!} \int_0^\pi (1 - \cos u)^n e^{-zu} du,$$

die, da $0 \leq (1 - \cos u)^n \leq 2^n$ ist, in der Halbebene $\Re(z) = x \geq \delta$ gleichmäßig und absolut konvergiert.

Man erhält nämlich nach zweimaliger partieller Integration, wenn man $1 - \cos u$ durch $2 \sin^2 \frac{u}{2}$ ersetzt,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\sin \frac{u}{2} \right)^{2n} e^{-zu} du &= \frac{2n \cdot 2^{2n-1}}{z^2 (2n)!} \int_0^\infty \left[\frac{2n-1}{2} \cos^2 \frac{u}{2} \left(\sin \frac{u}{2} \right)^{2n-2} - \frac{1}{2} \left(\sin \frac{u}{2} \right)^{2n} \right] e^{-zu} du \\ &= \frac{2n \cdot 2^{2n-1}}{z^2 (2n)!} \int_0^\infty \left[\frac{2n-1}{2} \left(\sin \frac{u}{2} \right)^{2n-2} - n \left(\sin \frac{u}{2} \right)^{2n} \right] e^{-zu} du, \end{aligned}$$

und diese Identität führt auf die Rekursionsformel

$$\frac{2^n}{(2n)!} \int_0^\infty (1 - \cos u)^n e^{-zu} du = \frac{2^{n-1}}{(2n-2)! (z^2 + n^2)} \int_0^\infty (1 - \cos u)^{n-1} e^{-zu} du.$$

Nach n -maliger Anwendung dieser Rekursionsformel erhält man

$$\frac{2^n}{(2n)!} \int_0^\infty (1 - \cos u)^n e^{-zu} du = \frac{1}{(z^2 + n^2) \dots (z^2 + 1^2)} \int_0^\infty e^{-zu} du = \frac{1}{G_n(-z+1)}$$

und damit ist die Formel (9) bewiesen. Aus ihr folgt

$$(10) \quad \frac{1}{G_n(z)} = \frac{2^n}{(2n)!} \int_0^\infty (1 - \cos u)^n e^{(z-1)u} du,$$

wobei das Integral rechter Hand für $x \leq 1 - \delta$ absolut und gleichmäßig konvergiert.

Ersetzt man in diesem Integral e^{zu} durch die Potenzreihe $\sum_{v=0}^\infty \frac{z^v}{v!} u^v$, so kann nach Hilfssatz 3 für reelle positive $z \leq 1 - \delta$ die Reihenfolge von Summation und Integration vertauscht werden. Dann ergibt sich

$$(11) \quad \frac{1}{G_n(z)} = \sum_{v=0}^\infty \frac{\int_0^\infty u^v \varphi(u) du}{v!} z^v,$$

wobei

$$\varphi(u) = \frac{2^n}{(2n)!} (1 - \cos u)^n e^{-u}$$

gesetzt ist.

Formel (11) liefert nun aber für die Koeffizienten c_v der Potenzreihe (8) die Integraldarstellung

$$c_v = \int_0^\infty u^v \varphi(u) du,$$

die wegen $\varphi(u) \geq 0$ die Anwendung des Hilfssatzes 2 ermöglicht. Aus ihm folgt $C_m > 0$, $B_m > 0$ für alle m . W. z. b. w.

5. Zweites Beispiel. Man setze

$$(12) \quad g(z) = -2i \sin(i - iz).$$

Diese ganze transzendente Funktion verschwindet für $z = 1 \pm n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots, \infty$).

Entwickelt man

$$(13) \quad \frac{1}{g(z)} = \sum_{v=0}^\infty \frac{c_v}{v!} z^v,$$

so sind die aus dem Koeffizienten c_v gebildeten Determinanten C_m und B_m für alle m positiv.

Beweis. Es ist

$$(14) \quad \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{e^{1-z} - e^{-(1-z)}} = e^{-(1-z)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n(1-z)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)(1-z)}$$

$$(15) \quad = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-(2n+1)} \frac{(2n+1)^{\nu}}{\nu!} z^{\nu}.$$

Die Summe (14) ist, wie unmittelbar ersichtlich, für $x \leq 1 - \delta$ absolut und gleichmäßig konvergent. Da ferner für reelle positive $z \leq 1 - \delta$ in der konvergenten Doppelsumme (15) alle Glieder positiv sind, läßt sich die Reihenfolge der Summation nach ν und n vertauschen. Man erhält demzufolge

$$\frac{1}{g(z)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{\nu} e^{-(2n+1)}}{\nu!} z^{\nu},$$

hat also für die Koeffizienten c_{ν} der Potenzreihe (13) die Summendarstellung

$$c_{\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{\nu} e^{-(2n+1)}.$$

Diese Summe kann auch als Stieltjessches Integral

$$c_{\nu} = \int_0^{\infty} u^{\nu} d\Phi(u)$$

geschrieben werden, wenn $\Phi(u)$ als sogenannte Treppenfunktion durch die Beziehungen

$$\Phi(u) = 0 \quad \text{für } u < 1,$$

$$\Phi(u) = e^{-1} \quad \text{für } 1 \leq u < 3,$$

$$\Phi(u) = \sum_{n=0}^m e^{-(2n+1)} \quad \text{für } 2m+1 \leq u < 2m+3$$

definiert wird.

Nunmehr zeigt der Hilfssatz 2, daß die aus dem c_{ν} gebildeten Determinanten C_m und B_m sämtlich positiv sind. W. z. b. w.

§ 3.

6. Nachdem durch die Beispiele des vorigen Paragraphen gezeigt wurde, daß die in der Einleitung angegebenen Pólyaschen Sätze sich nicht umkehren lassen, verallgemeinern wir zunächst die Fragestellung, indem wir beliebige Potenzreihen der Form (5) untersuchen, die einen endlichen

Konvergenzkreis besitzen und deren Koeffizientendeterminanten C_m bzw. C_m und B_m sämtlich positiv sind, ohne vorauszusetzen, daß diese Potenzreihen die Reziproken ganzer transzendenter Funktionen darstellen.

Satz A. Es sei $f(z)$ eine analytische Funktion, die im Innern des auf der Achse der reellen Zahlen gelegenen Intervalls $a < z < b$ regulär sein möge. Sei α ein innerer Punkt des Intervalls $a < z < b$ und

$$(16) \quad f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{c_v}{v!} (z - \alpha)^v$$

die Potenzreihe, in die sich $f(z)$ an der Stelle $z = \alpha$ entwickeln läßt.

I. Sind die Koeffizientendeterminanten C_m sämtlich positiv, so existiert die Funktion $f(z)$ in dem streifenförmigen Bereich $\alpha + \delta \leq x \leq b - \delta$ der z -Ebene, wird dort durch das absolut und gleichmäßig konvergente Stieltjessche Integral

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zu} d\Phi(u)$$

dargestellt und bleibt unterhalb einer festen, von z unabhängigen Schranke.

Ist demnach $\xi_1 < x < \xi_2$ der genaue Konvergenzbereich der Integraldarstellung für $f(z)$, so ist $\xi_1 \leq a$, $\xi_2 \geq b$, und die reellen Punkte $z = \xi_1$, $z = \xi_2$ sind singuläre Stellen von $f(z)$.

II. Sind die Koeffizientendeterminanten C_m und B_m sämtlich positiv, so existiert die Funktion $f(z)$ in der Halbebene $x \leq b - \delta$, wird dort durch das absolut und gleichmäßig konvergente Stieltjessche Integral

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{zu} d\Phi(u)$$

dargestellt und bleibt dort unterhalb einer festen, von z unabhängigen Schranke.

Ist demnach $x = \xi$ die wahre Konvergenzgerade der Integraldarstellung für $f(z)$, so ist $\xi \geq b$ und der reelle Punkt $z = \xi$ eine singuläre Stelle von $f(z)$.

Beweis von II. Sei ρ der Konvergenzradius der Potenzreihe (16).

Nach der Theorie der Stieltjesschen Kettenbrüche^{*)} folgt aus der Voraussetzung $C_m > 0$, $B_m > 0$ für alle m die Existenz einer im Intervall $0 \leq u < \infty$ definierten reellen, nirgends abnehmenden Funktion $\Psi(u)$, durch die sich die Koeffizienten c_v als Stieltjessche Integrale,

*) T. J. Stieltjes, Recherches sur les fractions continues, Ann. de la fac. des Sc. de Toulouse 8 (1894), S. J. 1–122, vgl. insbes. S. 92–98. Siehe auch Perron, l. c. Anm. ³⁾, S. 415–417.

$$c_v = \int_0^\infty u^v d\Psi(u),$$

darstellen lassen.

Man bilde nunmehr die nach Voraussetzung für $|z - \alpha| \leq \varrho - \delta$ konvergente unendliche Summe

$$f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\int_0^\infty u^v d\Psi(u)}{v!} (z - \alpha)^v.$$

Wegen der absoluten Konvergenz dieser Summe läßt sich aber nach Hilfssatz 4 die Reihenfolge von Integration und Summation vertauschen, und es ergibt sich das mindestens für $|z - \alpha| \leq \varrho - \delta$ absolut konvergente Integral

$$(17) \quad f(z) = \int_0^\infty e^{(z-\alpha)u} d\Psi(u) = \int_0^\infty e^{zu} d\Phi(u),$$

wenn

$$\Phi(u) = \int_0^u e^{-av} d\Psi(v)$$

gesetzt wird.

Nunmehr folgt aber nach bekannten Sätzen, daß das Integral rechter Hand von (17) in der ganzen Halbebene $x \leq \alpha + \varrho - \delta$ absolut und gleichmäßig konvergiert. Ist also $x < \xi$ die genaue Konvergenzhalbebene des Integrals (17), so ist jedenfalls $\xi > \alpha + \varrho$. Es ist aber sogar $\xi \geq b$, denn nach Hilfssatz 5 ist der reelle Punkt $z = \xi$ eine singuläre Stelle von $f(z)$, kann also nicht im Innern des Regularitätsintervalls $a < x < b$ gelegen sein.

Für $x \leq \xi - \delta$ ist

$$|f(z)| \leq \int_0^\infty |e^{zu}| d\Phi(u) \leq \int_0^\infty e^{(\xi-\delta)u} d\Phi(u),$$

d. h. $f(z)$ bleibt in der Halbebene $x \leq \xi - \delta$ unter einer festen, von z unabhängigen Schranke. Damit ist die Behauptung II vollständig bewiesen.

Beweis von I. Bezeichnet ϱ wieder den Konvergenzradius der Potenzreihe (16), so läßt sich nach einem Satze von Cauchy eine Konstante k von der Beschaffenheit bestimmen, daß für alle v

$$(18) \quad c_v \leq \frac{v! k}{(\varrho - \delta)^v}$$

ist.

Da in Satz A I wenigstens die Koeffizientendeterminanten C_m für alle m positiv vorausgesetzt sind, kann man mit Hilfe eines von Herrn Grommer angegebenen Auswahlverfahrens⁹⁾ eine im Intervall $-\infty < u$

⁹⁾ J. Grommer, Ganze transzendente Funktionen mit lauter reellen Nullstellen, Inaugural-Dissertation, Göttingen (1914), abgedruckt im Journal für reine u. an-

$< +\infty$ definierte reelle, nirgends abnehmende Funktion $\Psi(u)$ konstruieren, durch die sich die Koeffizienten c_ν als Stieltjessche Integrale

$$(19) \quad c_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} u^\nu d\Psi(u)$$

darstellen lassen.

Es ergibt sich nun wegen (18)

$$\int_0^\infty u^{2\nu} d\Psi(u) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} u^{2\nu} d\Psi(u) \leq k \frac{(2\nu)!}{(\varrho - \delta)^{2\nu}}.$$

Mit Hilfe der Schwarzischen Ungleichheitsbeziehung erhält man ferner

$$\begin{aligned} \int_0^\infty u^{2\nu+1} d\Psi(u) &\leq \sqrt{\int_0^\infty u^{2\nu} d\Psi(u) \int_0^\infty u^{2\nu+2} d\Psi(u)} \leq \sqrt{c_{2\nu} c_{2\nu+2}} \\ &\leq k \sqrt{1 + \frac{1}{2\nu+1}} \frac{(2\nu+1)!}{(\varrho - \delta)^{2\nu+1}} \leq k_1 \frac{(2\nu+1)!}{(\varrho - \delta)^{2\nu+1}}, \end{aligned}$$

wenn $k_1 = \sqrt{2}k > k$ gesetzt wird.

Es besteht also für alle geraden und ungeraden ν die Abschätzung

$$(20) \quad \int_0^\infty u^\nu d\Psi(u) \leq k_1 \frac{\nu!}{(\varrho - \delta)^\nu}.$$

Entsprechend findet man für alle ν

$$(21) \quad \left| \int_{-\infty}^0 u^\nu d\Psi(u) \right| \leq k_1 \frac{\nu!}{(\varrho - \delta)^\nu}.$$

Bildet man die unendliche Summe

$$(22) \quad f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\int_0^\infty u^\nu d\Psi(u)}{\nu!} (z - \alpha)^\nu,$$

so ist sie auf Grund der Abschätzungen (20) für $|z - \alpha| \leq \varrho - 2\delta$ absolut und gleichmäßig konvergent. Demzufolge läßt sich ebenso wie beim Beweise von A II nach Hilfssatz 4 die Reihenfolge von Summation und Integration vertauschen, und man erhält das mindestens für $|z - \alpha| \leq \varrho - 2\delta$ absolut konvergente Integral

$$(23) \quad f_2(z) = \int_0^\infty e^{(z-\alpha)u} d\Psi(u).$$

gewandte Mathematik 144 (1914), S. 114–166, vgl. insbes. Kap. III, S. 137–143. Der Satz, daß die Integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} u^\nu d\Psi(u)$ konvergieren und gleich c_ν werden, ist dort allerdings noch nicht ausgesprochen; doch läßt er sich ohne große Schwierigkeiten beweisen und soll an anderer Stelle veröffentlicht werden. Vgl. l. c. Anm.⁵), S. 212–214.

Da das Integral rechter Hand von (23) insbesondere für $z = \alpha + \varrho - 2\delta$ absolut konvergiert, so konvergiert es nach bekannten Sätzen auch absolut und gleichmäßig für $x \leq \alpha + \varrho - 2\delta$. Ist also der Bereich $x < \xi_2$ die wahre Konvergenzhalbebene von $f_2(z)$, so ist gewiß $\xi_2 \geq \alpha + \varrho$; ferner erhält man für $x \leq \xi_2 - \delta$

$$(24) \quad |f_2(z)| \leq f_2(\xi_2 - \delta).$$

Entsprechend bilde man die wegen (21) für $|z - \alpha| \leq \varrho - 2\delta$ absolut und gleichmäßig konvergente unendliche Reihe

$$(25) \quad f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\int_{-\infty}^0 u^{\nu} d\Psi(u)}{\nu!} (z - \alpha)^{\nu} = \int_{-\infty}^0 e^{(z-\alpha)u} d\Psi(u).$$

Denn auch hier läßt sich, wofern nur $|z - \alpha| \leq \varrho - 2\delta$ angenommen wird, die Reihenfolge von Summation und Integration nach Hilfssatz 4 vertauschen. Das Integral rechter Hand von (25) konvergiert aber insbesondere für $z = \alpha - \varrho + 2\delta$ absolut; dann muß dieses Integral auch für $x \geq \alpha - \varrho + 2\delta$ absolut und gleichmäßig konvergieren.

Bezeichnet man mit ξ_1 die Konvergenzabszisse des Integrals (25), so ist gewiß $\xi_1 \leq \alpha - \varrho$; außerdem wird in dem Bereiche $x \geq \xi_1 + \delta$

$$(26) \quad |f_1(z)| \leq f_1(\xi_1 + \delta).$$

Die Potenzreihen (22) und (25) für $f_2(z)$ und $f_1(z)$ lassen mit Rücksicht auf die Integraldarstellungen (19) für die Koeffizienten c_{ν} erkennen, daß

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(z-\alpha)u} d\Psi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zu} d\Phi(u)$$

wird, wenn man

$$\Phi(u) = \int_{-\infty}^u e^{-av} d\Psi(v)$$

setzt. Es existiert also $f(z)$ in dem Vertikalstreifen $\xi_1 + \delta \leq x \leq \xi_2 - \delta$, den die Konvergenzhalbebenen der Integrale (23) und (25) gemeinsam haben, und bleibt dort wegen (24) und (26) unterhalb einer festen von z unabhängigen Schranke.

Es bleibt nur noch übrig zu beweisen, daß $\xi_1 \leq a$, $\xi_2 \geq b$ ist. Zu diesem Zwecke berücksichtige man, daß die Funktion $f_1(z) = f(z) - f_2(z)$ in jedem innern Punkte des Intervalls $a < x \leq \alpha$ regulär ist, denn nach Voraussetzung ist $f(z)$ im Innern des Intervalls $a < x < b$, und $f_2(z)$ sogar für $x < \xi_2$ regulär und es ist sowohl $b > a$ als auch $\xi_2 > a$.

Andrerseits ist aber nach Hilfssatz 5 der reelle Punkt $z = \xi_1$ eine singuläre Stelle von $f_1(z)$, also $\xi_1 \leq a$.

Ebenso zeigt man, daß $f_2(z)$ für $\alpha \leq x < b$ regulär ist und schließt dann, indem man den Zusatz zu Hilfssatz 5 benutzt, daß der reelle Punkt $z = \xi_2$ eine singuläre Stelle von $f_2(z)$, also $\xi_2 \geq b$ ist. Da endlich $f_1(z)$ für $z = \xi_2$, $f_2(z)$ für $z = \xi_1$ regulär ist, so sind $z = \xi_1$ und $z = \xi_2$ beide singuläre Stellen von $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$. Damit ist auch Behauptung vollständig bewiesen.

7. Satz B. Es sei $f(z)$ eine analytische Funktion, die im Innern des auf der Achse der reellen Zahlen gelegenen Intervalls $a < x < b$ regulär sein möge. Es seien α und β zwei beliebige innere Punkte des Intervalls $a < x < b$ und

$$f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{c_v}{v!} (z - \alpha)^v, \quad f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{c'_v}{v!} (z - \beta)^v$$

die Potenzreihen, in die sich $f(z)$ an den Stellen $z = \alpha$ bzw. $z = \beta$ entwickeln läßt.

I. Sind die aus den Koeffizienten c_v gebildeten Determinanten $C_m > 0$ für alle m , so sind auch die aus den Koeffizienten c'_v entsprechend gebildeten Determinanten C'_m sämtlich positiv.

II. Sind die aus den Koeffizienten c_v gebildeten Determinanten C_m und B_m sämtlich positiv, so sind auch die aus den Koeffizienten c'_v entsprechend gebildeten Determinanten C'_m und B'_m sämtlich > 0 .

Beweis von I. Nach Satz A I läßt sich $f(z)$ durch das mindestens im Streifen $a + \delta \leq x \leq b - \delta$ absolut und gleichmäßig konvergente Integral

$$(27) \quad f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zu} d\Phi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(z-\beta)u} e^{\beta u} d\Phi(u)$$

darstellen.

Bezeichnet man mit ϱ die kleinere der beiden Zahlen $\beta - a$, $b - \beta$, so konvergiert sogar das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{|(z-\beta)u|} e^{\beta u} d\Phi(u)$$

für $|z - \beta| \leq \varrho - \delta$, wie man leicht erkennt, wenn man die Integrale $\int_0^{\infty}$ und $\int_{-\infty}^0$ wieder gesondert betrachtet und berücksichtigt, daß das Integral $\int_0^{\infty}$ für $z - \beta = \varrho - \delta$ und das Integral $\int_{-\infty}^0$ für $z - \beta = -\varrho + \delta$ absolut konvergiert. Daher kann man nach Hilfssatz 3, wenn man die Funktion $e^{(z-\beta)u}$ durch ihre Potenzreihenentwicklung ersetzt, das Integral (27) gliedweise integrieren und erhält die für $|z - \beta| < \varrho$ konvergente Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} u^v e^{\beta u} d\Phi(u)}{v!} (z - \beta)^v,$$

as heißt aber nichts anderes, als daß

$$c'_v = \int_{-\infty}^{+\infty} u^v e^{\beta u} d\Phi(u)$$

ird. Die aus diesen Koeffizienten c'_v gebildeten Determinanten C'_m sind aber nach Hilfssatz 1 sämtlich positiv, w. z. b. w.

Beweis von II. Aus Satz A II folgt, daß sich $f(z)$ in der Halbebene $\leq b - \delta$ durch das dort absolut und gleichmäßig konvergente Integral

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{zu} d\Phi(u) = \int_0^{\infty} e^{(z-\beta)u} e^{\beta u} d\Phi(u)$$

arstellen läßt.

Ersetzt man die Funktion $e^{(z-\beta)u}$ durch ihre Potenzreihenentwicklung, so läßt sich nach Hilfssatz 3 ebenso wie beim Beweise von B I die Integration gliedweise ausführen und man erhält dann

$$f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\int_0^{\infty} u^v e^{\beta u} d\Phi(u)}{v!} (z - \beta)^v,$$

$$c'_v = \int_0^{\infty} u^v e^{\beta u} d\Phi(u).$$

Die aus diesen Koeffizienten c'_v gebildeten Determinanten C'_m und B'_m sind aber nach Hilfssatz 2 sämtlich positiv, w. z. b. w.

§ 4.

8. Satz C. Es sei

$$f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{c'_v}{v!} z^v$$

eine ganze transzendente Funktion und es seien die aus den Koeffizienten c'_v gebildeten Determinanten C'_m sämtlich positiv. Dann besitzt die Funktion $f(z)$ keine reellen Nullstellen.

Beweis. Angenommen, die Funktion $f(z)$ verschwinde in dem reellen Punkte $z = \alpha$, so müßte, wenn man $f(z)$ an der Stelle $z = \alpha$ in eine Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{c'_v}{v!} (z - \alpha)^v$$

entwickelt, der Koeffizient $c'_0 = 0$ sein. Andererseits sind aber, da nach Voraussetzung $f(z)$ als ganze Funktion auf der ganzen reellen Achse regulär

ist, nach Satz B I sämtliche aus den Koeffizienten c'_v gebildeten Determinanten $C'_m > 0$, insbesondere also $C'_0 = c'_0 > 0$. Es kann daher im Widerspruch zu unserer Annahme c'_0 nicht gleich 0 sein, w. z. b. w.

Über das Geschlecht der Funktion $f(z)$ läßt sich keine bestimmte Aussage machen, denn es gibt Funktionen unendlich hoher Ordnung, die der Determinantenbedingung $C_m > 0, B_m > 0$ genügen, wie z. B. die Funktion

$$f(z) = \int_1^{\infty} e^{-u \log u + zu} du = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{c_v}{v!} z^v.$$

Es ergibt sich nämlich für positive reelle $z \geq 1$, da, wie die Betrachtung des Differentialquotienten lehrt, die Funktion $-u \log u + zu$ für $u > e^{z-1}$ mit wachsendem u monoton abnimmt,

$$\begin{aligned} f'(z) &> \int_{e^{z-1}}^{e^{z-\frac{1}{2}}} e^{-u \log u + zu} du > (e^{z-\frac{1}{2}} - e^{z-1}) e^{-(z-\frac{1}{2})e^{z-\frac{1}{2}} + ze^{z-\frac{1}{2}}} \\ &= (\sqrt{e} - 1) e^{\frac{1}{2}e^{z-\frac{1}{2}} + z-1} e^{10}. \end{aligned}$$

9. Satz D. Es sei $f(z) = \frac{1}{g(z)}$ die Reziproke einer ganzen Funktion. Es werden mit $-\infty < \dots < \xi_{-1} < \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \infty$ sämtliche endlich oder unendlich vielen reellen Nullstellen von $g(z)$ der Größe nach geordnet bezeichnet; ξ_0 bezeichne diejenige Nullstelle, die dem Nullpunkt am nächsten gelegen ist. Es sei entsprechend $-\infty, \dots, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \infty$ eine beliebige Folge reeller Punkte von der Beschaffenheit, daß der Punkt $z = \alpha_p$ im Innern des Intervalls $\xi_{p-1} < z < \xi_p$ gelegen ist. Existiert eine kleinste reelle Nullstelle ξ_q , so sei $\alpha_q < \xi_q$ die kleinste der Zahlen α_p ; existiert eine größte Nullstelle ξ_q , so sei $\alpha_{q'+1} > \xi_q$ die größte der Zahlen α_p .

Es seien ferner

$$\pm f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{c_v^{(p)}}{v!} (z - \alpha_p)^v$$

die Potenzreihen, in die sich $\pm f(z)$ an den Stellen $z = \alpha_p$ entwickeln läßt, und zwar ist das positive oder negative Vorzeichen zu wählen, je nachdem $f(\alpha_p) > 0$ oder < 0 ist. (Die Wahl des Vorzeichens hängt also von den Index p ab.)

I. Sind nun die aus den Koeffizienten $c_v^{(p)}$ nach Art von (2) gebildeten Hankelschen Determinanten $C_m^{(p)}$ für alle Werte der Indizes p und m positiv und ist $z = \xi + i\eta$ eine komplexe Nullstelle von $g(z)$, so ist auch

¹⁰⁾ Diesen einfachen Beweis, daß die Funktion $f(z)$ von unendlich hoher Ordnung ist, verdanke ich einer freundlichen brieflichen Mitteilung von Herrn Pólya nach der ersten Korrektur.

= ξ eine Nullstelle von $g(z)$; das heißt alle Nullstellen von $g(z)$ haben die Form $z = \xi_r + i\eta_{r\mu}$.

II. Bildet man aus den Koeffizienten $c_v^{(p)}$ auch noch die in Formel (4) definierten Determinanten $B_m^{(p)}$ und sind für einen bestimmten Wert q des Index p die Determinanten $B_m^{(q)}$ für alle Werte des Index m positiv, so ist $z = \xi_q$ die kleinste reelle Nullstelle von $g(z)$.

Beweis. Da nach Voraussetzung $\pm f(z)$ in dem reellen Intervall $\xi_{p-1} < x < \xi_p$ regulär ist, so folgt aus Satz A I unmittelbar, daß die Funktion $f(z)$ im Innern eines jeden Vertikalstreifens $\xi_{p-1} < x < \xi_p$ regulär ist, daß also ihre Reziproke, die ganze Funktion $g(z)$, im Innern dieses Streifens keine Nullstellen hat.

Sind außerdem für eine feste Zahl q die Determinanten $B_m^{(q)}$ für jeden Wert des Index m positiv, so folgt aus Satz A II, da $f(z)$ jedenfalls für $\xi_q - \delta \leq x < \xi_q$ regulär ist, daß $f(z)$ in der ganzen Halbebene $x \leq \xi_q - \delta$ regulär ist, also die ganze transzendente Funktion $g(z)$ dort keine Nullstellen besitzt, w. z. b. w.

Unter den Voraussetzungen des Satzes D folgt aus Satz B, wenn man $\pm f(z)$ in einem beliebigen regulären reellen Punkte $z = \alpha$ in die Potenzreihe

$$\pm f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{c_v}{v!} (z - \alpha)^v$$

entwickelt, daß die aus den c_v gebildeten Determinanten C_m sämtlich positiv sind. Daraus erklärt sich, daß es bei der Formulierung des Satzes D genügt, die Koeffizientendeterminanten $C_m^{(p)}$ der Potenzreihenentwicklung von $f(z)$ in je einem einzigen inneren Punkte $z = \alpha_p$ des Intervalls $\xi_{p-1} < z < \xi_p$ zu betrachten.

10. Es liegt nun die Frage nahe: Fixiert man ein einziges Intervall $\xi_{p-1} < z < \xi_p$ mit einem in seinem Innern gelegenen Punkte $z = \alpha_r$, und setzt man nur von den Koeffizientendeterminanten $C_m^{(r)}$ der Potenzreihenentwicklung von $\pm f(z)$ in diesem einzigen Punkte $z = \alpha_r$ der gesamten Achse der reellen Zahlen voraus, daß sie für alle Werte des Index m positiv sind, sind dann die Koeffizientendeterminanten $C_m^{(p)}$ der Potenzreihenentwicklung von $f(z)$ im Punkte $z = \alpha_p$ eines andern Intervalls $\xi_{p-1} < z < \xi_p$ von selbst alle positiv? Diese Frage muß verneint werden, wie jetzt durch ein Beispiel gezeigt werden soll.

Wie betrachten die Reziproke der ganzen transzendenten Funktion

$$g(z) = (a + z)(1 + z)\zeta(-z),$$

wo unter $\zeta(s)$ die Riemannsche ζ -Funktion der Primzahltheorie, unter

a eine reelle positive Konstante > 1 verstanden werden soll, über die später noch genauer verfügt werden wird.

Die sämtlichen reellen Nullstellen von $g(z)$ sind außer $z = -a$ bekanntlich $z = 2, 4, 6, \dots$ ¹¹⁾. Außerdem besitzt die Funktion $\zeta(-z)$ und damit auch $g(z)$ in dem Streifen $-1 < x < 0$ komplexe Nullstellen; darunter nach einem Satz des Herrn Hardy¹²⁾ unendlich viele Nullstellen mit dem reellen Teil $-\frac{1}{2}$.

Daraus folgt aber: Ist $z = \beta$ ein beliebiger reeller innerer Punkt des Intervalls $-a < x < -\frac{1}{2}$ und ist

$$-f(z) = \frac{-1}{g(z)} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{c'_v}{v!} (z - \beta)^v$$

die Potenzreihenentwicklung von $-f(z)$ im Punkte $z = \beta$, so ist zwar offenbar $-f(\beta) = c'_0 > 0$, aber die aus den Koeffizienten c'_v gebildeten Determinanten C'_m können nicht sämtlich positiv sein. Denn andernfalls müßte nach Satz D in Verbindung mit dem Hardyschen Satze die Funktion $f(z)$ im Punkte $z = -\frac{1}{2}$ einen Pol besitzen, während doch $f(z)$ im Innern des reellen Intervalls $-a < z < 2$ regulär ist.

Es soll nun weiter gezeigt werden, daß sich die positive Konstante a so bestimmen läßt, daß, unter α eine beliebige reelle Zahl $< -a$ verstanden, sämtliche Koeffizientendeterminanten C_m und B_m , die zu der Potenzreihenentwicklung von $f(z)$ im Punkte $z = \alpha$ gehören, positiv sind.

Damit ist dann ein Beispiel für die Reziproke einer ganzen transzendenten Funktion angegeben, zu deren Potenzreihenentwicklung in einem Punkte $z = \alpha$ positive Determinanten C_m gehören, während die Determinanten C'_m , die aus den Koeffizienten c'_v der Potenzreihenentwicklung von $f(z)$ an einer Stelle $z = \beta$ gebildet sind, nicht mehr sämtlich positiv sind; hierbei sind die reellen Punkte α und β durch den Pol $z = -a$ von $f(z)$ voneinander getrennt.

Bekanntlich läßt sich die Funktion $\frac{1}{\zeta(s)}$ durch die in der Halbebene $\sigma = \Re(s) \geq 1 + \delta$ gleichmäßig und absolut konvergente Dirichletsche Reihe¹³⁾

$$(28) \quad \frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

¹¹⁾ Vgl. z. B. E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Leipzig, 1 (1901), S. 284.

¹²⁾ G. H. Hardy, Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, C. R. hebdomadaire des séances de l'Ac. des sc. Paris, 158 (1914), S. 1012–1014.

¹³⁾ Vgl. z. B. l. c. Anm. ¹¹⁾, 2, S. 576.

arstellen, wobei unter $\mu(n)$ eine gewisse zahlentheoretische Funktion, der Möbiussche Koeffizient, zu verstehen ist.

Die Konstante a werde nunmehr so gewählt, daß die Partialsummen

$$S_k(a) = \sum_{n=1}^k \frac{\mu(n)}{n^a}$$

für alle Werte von k positive Werte annehmen. Zu diesem Zwecke bestimme man zunächst zu einem festen reellen Wert $b > 1$ einen Index k_0 von der Beschaffenheit, daß

$$(29) \quad S_k(\sigma) > 0 \text{ für } k > k_0, \sigma \geq b$$

ist, unter σ eine beliebige reelle Zahl verstanden. Eine solche Zahl k_0 existiert, da

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(\sigma) = \frac{1}{\zeta(\sigma)} \geq \frac{1}{\zeta(b)} > 0$$

ist, und $S_k(\sigma)$ für $\sigma \geq b$ mit wachsendem k gleichmäßig gegen seinen Grenzwert konvergiert.

Unter den endlich vielen Größen $S_k(b)$ für $k \leq k_0$ können einige negativ sein; da aber für alle k

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} S_k(\sigma) = 1$$

ist, so muß eine reelle Zahl $a > b$ von der Beschaffenheit existieren, daß

$$S_k(a) > 0 \text{ für } k \leq k_0.$$

Für $k \geq k_0$ folgt die verlangte Eigenschaft der $S_k(a)$ aus (29).

Es werde nunmehr im Intervall $0 \leq u < \infty$ eine reelle Funktion $M(u)$ durch die Bedingung

$$M(u) = S_k(a) \text{ für } \log k \leq u < \log(k+1)$$

definiert, und zwar ist $M(u)$ eine überall positive beschränkte sogenannte Treppenfunktion. Dann erhält man, indem man die Reihe (28) vermittelt partieller Summation umformt,

$$(30) \quad \frac{1}{\zeta(s)} = (s-a) \int_0^\infty M(u) e^{-(s-a)u} du.$$

Dieses Integral ist wegen der Beschränktheit von $M(u)$ in der Halbebene $\Re(s) \geq a + \delta$ absolut und gleichmäßig konvergent.

Setzt man weiter

$$N(u) = \int_0^u M(v) e^{(a-1)v} dv,$$

so ist auch $N(u)$ eine positive Funktion, und zwar wird

$$(31) \quad N(u) \leq M \frac{e^{(a-1)u} - 1}{a-1},$$

wenn mit M die obere Grenze der beschränkten positiven Funktion $M(u)$ bezeichnet wird.

Durch partielle Integration ergibt sich aus (30)

$$(32) \quad \frac{1}{\zeta(s)} = (s-a)(s-1) \int_0^\infty N(u) e^{-(s-1)u} du.$$

Das Integral rechter Hand ist hier wegen (31) in der Halbebene $\Re(s) \geq a + \delta$ absolut und gleichmäßig konvergent.

Substituiert man in (32) $s = -z$, so erhält man für $f(z) = \frac{1}{g(z)}$ die in der Halbebene $x \leq -a - \delta$ absolut und gleichmäßig konvergente Integraldarstellung

$$(33) \quad f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z+a)(z+1)\zeta(-z)} = \int_0^\infty N(u) e^{(z+1)u} du.$$

Ist α eine reelle Zahl $< -a$ und entwickelt man $f(z)$ an der Stelle $z = \alpha$ in eine Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{c_v}{v!} (z - \alpha)^v,$$

so wird

$$(34) \quad c_v = \int_0^\infty u^v N(u) e^{(\alpha+1)u} du,$$

wie man erkennt, wenn man in dem Integral rechter Hand von (33) die Funktion $e^{(z-\alpha)u}$ durch ihre Potenzreihenentwicklung ersetzt und dann mit Rücksicht auf Hilfssatz 3 gliedweise integriert.

Die Integraldarstellung (34) für die Koeffizienten c_v läßt aber nach Hilfssatz 2 erkennen, daß die aus ihnen gebildeten Determinanten C_m und B_m sämtlich positiv sind, w. z. h. w.

§ 5.

11. Man könnte endlich vermuten, daß sich der Satz D umkehren läßt. Man wird also fragen: Ist $f(z)$ die Reziproke einer ganzen Funktion $g(z)$, die außer den reellen Nullstellen $z = \xi_v$ nur komplexe Nullstellen der Form $z = \xi_v \pm i\eta_{v\mu}$ hat, sind dann die Koeffizientendeterminanten C_m , die zur Potenzreihenentwicklung von $\pm f(z)$ in irgendeinem reellen regulären Punkte $z = \alpha$ gehören, sämtlich positiv?

Auch diese Frage muß verneint werden, sogar für den Fall, daß $g(z)$ ein Polynom ist.

Erstes Beispiel. Man bezeichne mit $G_n(z)$ das gleiche Polynom wie in § 2 Formel (7), mit m eine ganze positive Zahl $< n$, und setze

$$\frac{1}{H(z)} = \frac{(z-1)^2 + m^2}{G_n(z)} = \frac{m^2 - n^2}{G_n(z)} + \frac{1}{G_{n-1}(z)}.$$

Dann ist $H(z)$ ein Polynom vom Grade $2n-1$, das an den $2n-1$ Stellen $z = 1 \pm i\nu$ ($\nu = 0, 1, \dots, m-1, m+1, \dots, n$) von erster Ordnung verschwindet.

Benutzt man für $\frac{1}{G_n(z)}$ und $\frac{1}{G_{n-1}(z)}$ die Integraldarstellung (10), so erhält man

$$(35) \quad \frac{1}{H(z)} = \int_0^\infty \psi(u) e^{zu} du = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu!} z^\nu$$

$$c_\nu = \int_0^\infty u^\nu \psi(u) du,$$

wobei

$$\psi(u) = \frac{2^n}{(2n)!} e^{-u} (1 - \cos u)^{n-1} \left[(m^2 - n^2) (1 - \cos u) + \frac{2n(2n-1)}{2} \right]$$

$$= \frac{2^n}{(2n)!} e^{-u} (1 - \cos u)^{n-1} [m^2 + n^2 - n + (n^2 - m^2) \cos u]$$

gesetzt ist.

Ist nun $2m^2 - n < 0$, also z. B. $m = 1, n \geq 3$, so ist die Funktion $\psi(u)$ nicht beständig > 0 , da sie für $u = (2\nu + 1)\pi$ negativ wird.

Sind jetzt C_m die der Potenzreihenentwicklung von $\frac{1}{H(z)}$ an der Stelle $z = 0$ zugehörigen Koeffizientendeterminanten, so können diese nicht sämtlich positiv sein.

Denn andernfalls würden sich die Koeffizienten c_ν durch Stieltjessche Integrale

$$(36) \quad c_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} u^\nu d\Phi(u)$$

darstellen lassen. Man definiere nunmehr zwei reelle nicht negative Funktionen $\psi_1(u)$ und $\psi_2(u)$ im Intervall $-\infty < u < +\infty$ durch die Beziehungen:

$$\psi_1(u) = 0$$

in allen Punkten $u < 0$ und in allen solchen Punkten $u \geq 0$, in denen $\psi(u) \leq 0$ ist;

$$\psi_1(u) = \psi(u)$$

in allen Punkten $u \geq 0$, in denen $\psi(u) > 0$ ist; andererseits

$$\psi_2(u) = 0$$

in allen Punkten $u < 0$ und in allen solchen Punkten $u \geq 0$, in denen $\psi(u) \geq 0$ ist;

$$\psi_2(u) = -\psi(u)$$

in allen Punkten $u \geq 0$, in denen $\psi(u) < 0$ ist. Es wird also

$$\psi_1(u) - \psi_2(u) = 0 \quad \text{für } u < 0,$$

$$\psi_1(u) - \psi_2(u) = \psi(u) \quad \text{für } u \geq 0.$$

Wegen (35) und (36) erhält man ferner

$$\gamma_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} u^\nu (d\Phi(u) + \psi_2(u) du) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^\nu \psi_1(u) du.$$

Es ergeben sich demnach für die Koeffizienten γ_ν zwei verschiedene Darstellungen durch Stieltjessche Integrale oder, wie man auch sagen kann: das zu der Folge von Koeffizienten γ_ν gehörige Stieltjessche Momentenproblem im weiteren Sinne ist unbestimmt¹⁴⁾.

Nun ist aber

$$\text{also} \quad |\psi_1(u)| \leq \frac{(2n^2 - n) 2^{2n-1}}{(2n)!} e^{-u},$$

$$\gamma_\nu = \int_0^\infty u^\nu \psi_1(u) du \leq \frac{2^{2n-2}}{(2n-2)!} \nu!.$$

Andererseits läßt sich zeigen¹⁵⁾, daß das einer Folge von Koeffizienten γ_ν , die mit ν nicht stärker als $\nu!$ wachsen, zugehörige Momentenproblem bestimmt ist. Die Annahme, daß sämtliche Koeffizientendeterminanten C_m positiv sind, führt also zu einem Widerspruch.

Zweites Beispiel. Man setze

$$h(z) = \frac{-2i \sin(i - iz)}{(z-1)^2 + m^2 \pi^2};$$

dann ist $h(z)$ eine ganze transzendente Funktion, die an den Stellen $z = 1 \pm \nu \pi i$ ($\nu = 0, 1, \dots, m-1, m+1, \dots, \infty$) von erster Ordnung verschwindet. Hat $g(z)$ wieder die gleiche Bedeutung wie in Formel (12) des § 2, so ist

$$[(z-1)^2 + m^2 \pi^2] h(z) = g(z) = e^{1-z} - e^{-(1-z)}.$$

Nun ist aber für $y = \pm 2k\pi$ ($k = 0, 1, \dots, \infty$)

$$\frac{1}{g(iy)} = \frac{1}{e^{1-iy} - e^{-(1-iy)}} = \frac{e}{e^2 - 1} > 0.$$

An diesen Stellen ist aber die Funktion $\frac{1}{h(iy)}$ für hinreichend große Werte von k dem absoluten Betrage nach größer als jede beliebige vorgegebene noch so große positive Zahl, ist also längs der Achse der rein imaginären Zahlen nicht beschränkt. Dann können aber die Koeffizientendeterminanten C_m , die zu der Potenzreihenentwicklung von $\frac{1}{h(z)}$ an der Stelle $z = 0$ gehören, nicht sämtlich positiv sein, denn andernfalls müßte nach Satz A I die Funktion $\frac{1}{h(z)}$ in jedem Streifen $\alpha \leq x \leq 1 - \delta$, unter α eine beliebige reelle Zahl $< 1 - \delta$ verstanden, beschränkt sein, w. z. b. w.

¹⁴⁾ l. c. Anm. ⁶⁾, S. 48–49, und Anm. ⁵⁾, S. 214.

¹⁵⁾ l. c. Anm. ⁵⁾, S. 214–218.

Berichtigung zu meiner Arbeit „Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung“¹⁾.

Von

R. v. Mises in Berlin.

1. Die Bemerkung zu Beginn von § 3 (S. 66), wonach die Wahrscheinlichkeit W_A *Maßfunktion für jede Menge* sein soll, beruht — worauf mich Herr Prof. Hausdorff in Greifswald freundlichst aufmerksam gemacht hat — auf Irrtum. In der Tat erfüllen die W für eine abzählbar unendliche Reihe von Punktmengen $A_1, A_2, \dots$ deren Vereinigungsmenge A ist, nicht die Bedingung $W_A \leq W_{A_1} + W_{A_2} + \dots$, vielmehr ist stets $W_A \geq W_{A_1} + W_{A_2} + \dots$. Von der Bemerkung ist nur zum Beweise von Satz 11 (S. 69) Gebrauch gemacht worden, der die Darstellbarkeit von W_A durch ein Stieltjes-Integral über die Punktfunktion $W(\bar{x})$ betrifft. Diese — der Bequemlichkeit halber eingeführte — Darstellung der Wahrscheinlichkeit durch die Punktfunktion $W(\bar{x})$ ist also nicht, wie es Satz 11 behauptet, für jede abgeschlossene Punktmenge A möglich. Natürlich gilt es, bei Beschränkung auf die praktisch allein vorkommenden arithmetischen oder geometrischen Verteilungen, für jedes regulär begrenzte Gebiet A usw.

2. Herr Prof. Helm in Dresden macht mich darauf aufmerksam, daß er in Bd. 1 der Annalen der Naturphilosophie (1902, S. 364—381) in seiner Abhandlung, „Die Wahrscheinlichkeitslehre als Theorie der Kollektivbegriffe“, eine Auffassung dargelegt hat, die meinen Grundlagen nahesteht. In der Tat ist hier einer der wesentlichen Gedanken meines Aufbaues, die von mir formulierte „Umkehrung“ der Wahrscheinlichkeitsdefinition, nämlich ihre Zurückführung auf ein Kollektiv statt auf die Berechnung gleichmöglicher Fälle, in der Hauptsache bereits vorgebildet.

¹⁾ Diese Zeitschrift 5 (1919), S. 52—99.

(Eingegangen am 5. März 1920.)

